Differenzial- und Integralrechnung

Übungsblatt 5

WS 11/12

---

1. **Nullstellensatz von Bolzano:**

   (a) Die beiden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien stetig auf dem Intervall $[a, b]$ und es gelte $f(a) > g(a)$ und $f(b) < g(b)$. Zeigen Sie, dass es einen Punkt $x^* \in [a, b]$ gibt, für den gilt
   $$f(x^*) = g(x^*)$$
   Hinweis: Betrachten Sie die Hilfsfunktion $h(x) = f(x) - g(x)$.

   (b) Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion
   $$f(x) = \frac{x - \sqrt{1-x}}{1+x}$$
   im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle hat und berechnen Sie diese anschließend.

2. **Reihen:**

   (a) Untersuchen Sie die Reihe
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n! + (n+2)!}{(2n)!}$$
   auf Konvergenz.

   (b) Untersuchen Sie, ob die Reihe
   $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(k+1)(k+2)}$$
   konvergiert.

3. **Stetige Ergänzbarkeit:** Geben Sie - falls möglich - eine stetige Ergänzung der Funktion
   $$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{für } -2 < x < 1 \\ -2x+4, & \text{für } 1 < x < 3 \\ x-2, & \text{für } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$
   in den Punkten $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ an.

4. **Monotonie von Funktionen:**

   (a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \ln(1 + e^x) + x$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

   (b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \sqrt{1+8x} - \sqrt[5]{6x^3 + 26}$ im Intervall $I = [0, 1]$ streng monoton wachsend ist.