

Differenzial- und Integralrechnung

Übungsblatt 6

WS 11/12

1. **Punktweise- und Gleichmäßige Konvergenz:** Sei $f_n = \frac{x}{n}$ Funktion mit Definitionsbereich $D = [a, b]$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n(x))$ *gleichmäßig* gegen 0 konvergiert. Was passiert wenn Sie den Definitionsbereich auf ganz \mathbb{R} erweitern?

2. **Elementare Funktionen: Logarithmen:** Vereinfachen Sie folgende Ausdrücke:

(a) $\ln \sqrt[8]{x^7} + \ln \sqrt[16]{x^2}$

(b) $\ln(x^2 - y^2) + \ln \frac{1}{x-y}$

(c) $\log_2(8) - \log_2(4)$

3. **Elementare Funktionen: Trigonometrie:** Zeigen Sie die folgenden Relationen:

(a) $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$

(b) $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$

(c) $\cos(x) = \frac{1 - \tan^2(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$

(d) $\sin(x) = \frac{2 \tan(\frac{x}{2})}{1 + \tan^2(\frac{x}{2})}$

4. **Elementare Funktionen: Hyperbolische Funktionen:** Zeigen Sie, dass $\operatorname{aracosh} y = \ln(y + \sqrt{y^2 - 1})$ gilt, wobei $y \geq 1$.

5. **Potenzreihen: Konvergenz und Konvergenz am Rand:** Untersuchen Sie die folgenden Potenzreihen zunächst auf Konvergenz. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren sie? Wenn Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen bestimmt haben, untersuchen Sie das Konvergenzverhalten an den Randpunkten des Konvergenzgebietes.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} (x-2)^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2+1}$