Differenzial- und Integralrechnung

Übungsblatt 9

WS 11/12

---

1. **TAYLOR-Reihen:**

   (a) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = x - \frac{x}{1+x}$ an der Stelle $x_0 = 0$ in eine TAYLOR-Reihe.

   (b) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x+2}{1+x^2}$. Ermitteln Sie das TAYLOR-Polynom $T_3(x, -2)$ und berechnen Sie damit näherungsweise $f(-1.9)$.

   (c) Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{2x-x^2}$. Ermitteln Sie das TAYLOR-Polynom $T_4(x, 1)$.

2. **Flächen im $\mathbb{R}^3$:**
   Aus der Vorlesung ist bekannt, dass sich reellwertige Funktionen von zwei reellen Variablen als Fläche im $\mathbb{R}^3$ veranschaulichen lassen. Fertigen Sie eine möglichst gute Skizze der folgenden zwei Funktionen an:

   - $z = \sin(x + y)$
   - $z = x^2 - y^2$

3. **Richtungsableitung:**

   (a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $f(x, y, z) = x^3yz^2 + e^{2x}$ in Richtung des Vektors $\vec{a} = (1, 1, 1)$ im Punkt $P = (0, 3, 2)$. Bestimmen Sie weiters die Richtung der maximalen Änderung von f in P.

   (b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot \sin x$ in Richtung des Vektors $\vec{a} = (1, 1)$ im Punkt $P = (\frac{\pi}{2}, 1)$.

   (c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $f(x, y) = x^2 + x \cos y$ in Richtung des Vektors $\vec{a} = (3, 4)$ im Punkt $P = (\frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4})$.

4. **Gradienten:**

   (a) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x, y) = \ln(\frac{x^3+2y^4+1}{x^2y^3})$ mit $x, y > 0$ im Punkt $x^0 = (2, 1)$.

   (b) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x, y) = \cos(1 + \frac{z}{x+y})$ im Punkt $x^0 = (0, 1, -1)$.

   (c) Bestimmen Sie den Gradienten von $f(x, y) = 4 \ln(\frac{x^2}{x^2+y^2})$ mit $x, y > 0$ im Punkt $x^0 = (1, 1)$.

5. **Wiederholung:**

   (a) Bestimmen Sie diejenigen Werte für x, an denen die folgende Funktion stetig ist:

   $$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}}{x - 5\sqrt{x} + 6}$$

   (b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = \frac{x-\sqrt{1-x}}{1+x}$ auf dem Intervall $I = (-1, 1)$ streng monoton wachsend ist.

(c) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + x}{\ln(1+x)}, \qquad \lim_{x\to\infty} \left[x - \sqrt{(x-a)(x-b)} \right], \qquad \lim_{x\to -1} \left(\frac{4}{x^2 - 2x - 3} + \frac{1}{x+1} \right)$$

(d) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sqrt{3x^4 - 2x^2 + 1} - (ax^2 + b)$. Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass gilt: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.