Differenzial- und Integralrechnung

Übungsblatt 10

WS 11/12

---

1. **Zur Kettenregel:** Überprüfen Sie die Kettenregel anhand der folgenden Funktion: $f(u, v, w) = u^2 + v^2 - w$, mit $u(x, y, z) = x^2y$, $v(x, y, z) = y^2$ und $w(x, y, z) = e^{-xz}$.

2. **Zur Jacobimatrix:** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (\cos y + x^2, e^{x+y})$ und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = (e^{u^2}, u - \sin v)$.

   (a) Berechnen Sie $h = f \circ g$.

   (b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $J_h(0, 0)$.

3. **Differenzierbarkeit:** Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind. Finden Sie ferner die entsprechenden Ableitungen.

   (a) $f(x, y) = 2$

   (b) $f(x, y) = x + y$

   (c) $f(x, y) = 2 + x + y$

   (d) $f(x, y) = x^2 + y^2$

   (e) $f(x, y) = e^{xy}$

   (f) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $U = \{(x, y)|x^2 + y^2 < 1\}$

   (g) $f(x, y) = x^4 - y^4$

4. **Aus der Praxis:** Eine Stockente schwimme auf einem Kreis $x = \cos t$, $y = \sin t$. Die (ortsabhängige) Wassertemperatur sei durch die Funktion $T = x^2e^y - xy^3$ beschrieben. Bestimmen Sie die Temperaturänderung die die Ente auf ihrem Weg wahrnimmt...

   (a) ... indem Sie die Kettenregel zur Anwendung bringen.

   (b) ... durch Ableitung von in Termen von t ausgedrückter Funktion T.

5. **Partielle Ableitungen:** Bestimmen Sie *alle* partiellen Ableitungen der Funktion

$$f(x, y) = \log\left(\frac{xy^2}{x^2 + y^2}\right) \cdot (x + 2y)$$

   bis zur zweiten Ordnung und zeigen Sie somit, dass $f_{xy} = f_{yx}$. Verwenden Sie dazu *keine* elektronischen Hilfsmitteln.

6. **Partielle Ableitungen:** Sei $u = f(x/y)$ eine beliebige (zweimal stetig differenzierbare) Funktion einer Variable. Zeigen Sie, dass

$$xu_x + yu_y = 0$$

und nutzen Sie dieses Ergebnis um

$$x^2 u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$$

zu zeigen.