Einige weitere wichtige Objekte

Kombinatorik

Frage: Wieviele Anordnungen von n verschiedenen Objekten gibt es?

Antwort: $n! = 1.2.\ldots.(n-1).n$ (**n-Fakultät** bzw. n**-Faktorielle**)

Per definition gilt: $0! = 1$

$0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$ etc.

(starkes Wachstum!)

Bemerkung. Definieren wir eine Funktion $f(n) = (n-1)!$ auf der Menge $\mathbb{N}$, dann hat diese Funktion offenbar die Eigenschaft $f(n+1) = nf(n)$.

Diese Funktion kann geeignet auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden und führt dann zum wichtigen Begriff der **Gamma-Funktion** $\Gamma(x)$.

Frage: Wieviele k-elementige Teilmengen einer n-elementigen Menge gibt es?

Antwort: $\binom{n}{k} = \frac{n.(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (**Binomialkoeffizient**)

Sprechweise: "n über k"

Offenbar gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad , \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad , \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

Die Binomialkoeffizienten tauchen auch bei der Berechnung von $(a+b)^n$ auf. Multiplizieren wir diesen Ausdruck aus, können wir nach dem Koeffizienten von $a^{n-k}b^k$ fragen.

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a + b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \qquad \text{etc.}$$

Die auftretenden Koeffizienten kann man in der Form des **Pascal'schen Dreiecks** anschreiben

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Des weiteren beobachten wir, dass der Koeffizient von $a^{n-k}b^k$ in den angeführten Fällen $\binom{n}{k}$ ist. Dass dies stets so ist, kann mittels vollständiger Induktion (siehe später) bewiesen werden und heißt

Binomischer Lehrsatz. $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

Speziell für $a = b = 1$ und $a = 1$, $b = -1$ ergeben sich die wichtigen Identitäten

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \quad \text{und}$$

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

Beispiel. Gewinnchancen beim Lotto "6 aus 45"

Es gibt $\binom{45}{6} = \frac{45.44.43.42.41.40}{1.2.3.4.5.6} = 8145060$ Möglichkeiten bei einer Ziehung.

Somit beträgt die Gewinnchance für 6 Richtige $1 : 8145060$.

Vollständige Induktion

Häufig haben wir es mit Aussagen $A(n)$ über natürliche Zahlen zu tun. Dabei wollen wir wissen, ob die vorliegende Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. für alle $n \in \mathbb{N}$ ab einem Index n_0 richtig ist.

Die Überprüfung für einige n ist **kein** Beweis, dass die Aussage für alle n richtig ist.

Beispiel. Betrachte $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

$$n = 1 \qquad \sum_{k=1}^{1} k = 1 = \tfrac{1.2}{2}$$

$$n = 2 \qquad \sum_{k=1}^{2} k = 1 + 2 = 3 = \tfrac{2.3}{2}$$

$$n = 3 \qquad \sum_{k=1}^{3} k = 1 + 2 + 3 = 6 = \tfrac{3.4}{2}$$

$$n = 4 \qquad \sum_{k=1}^{4} k = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \tfrac{4.5}{2}$$

Wir vermuten nun, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ und müssen diese Vermutung natürlich erst noch beweisen.

Der **Beweis mittels vollständiger Induktion** wird mit folgenden Schritten geführt:

- **Induktionsanfang**: Die Aussage $A(n)$ ist für $n = 1$ (bzw. $n = n_0$) richtig.
- **Induktionsvoraussetzung**: $A(n)$ ist richtig.
- **Induktionsbehauptung**: $A(n+1)$ ist richtig.
- **Induktionsbeweis**: Aus der Gültigkeit von $A(n)$ folgt die Gültigkeit von $A(n+1)$.

In obigem Beispiel haben wir uns überlegt, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ für $n = 1$ richtig ist. Nun nehmen wir an, dass $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ richtig ist, und müssen daraus folgern, dass $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ gilt.

(Die Aussage $A(n+1)$ ergibt sich aus der Aussage $A(n)$ dadurch, dass n durch $n+1$ ersetzt wird.)

Der eigentliche Induktionsbeweis ist in diesem Fall

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Beispiel. Man beweise $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$

$n = 1$: $\quad \sum\limits_{k=1}^{1} k^2 = 1 \quad ; \quad \frac{1.2.3}{6} = 1$ richtig!

Annahme: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ist richtig.

Behauptung: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ ist richtig.

Beweis: $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Beispiel. (Bernoulli Ungleichung)

Man beweise $(1+x)^n > 1 + nx$ für $x > -1$, $x \neq 0$ und $n \geq 2$.

Induktionsanfang $n = 2$: $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ ist richtig, weil $x^2 > 0$.

Annahme : $(1+x)^n > 1+nx$ ist richtig.

Behauptung : $(1+x)^{n+1} > 1+(n+1)x$ ist richtig.

Induktionsbeweis : $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) =$

$= 1+x+nx+nx^2 > 1+x+nx = 1+(n+1)x$

(Richtig, weil $1+x>0$ und $nx^2>0$)