

# Unendliche Reihen

Wegen der elementaren Eigenschaften der Zahlen ist klar, was unter einer **endlichen** Summe von Zahlen  $a_1 + a_2 + \dots + a_k$  zu verstehen ist. Vorerhand ist noch nicht erklärt, was unter einer "unendlichen Summe" von Zahlen zu verstehen ist.

**Frage.** Welcher 'Summenwert' ergibt sich bei  $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$  ?

Da der Begriff der Folge bereits zur Verfügung steht, kann nun auch dem Begriff der "unendlichen Summe" bzw. einer unendlichen Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  eine exakte Bedeutung gegeben werden.

Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge (die Folge der Summanden). Wir bilden eine zugehörige Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

$s_n$  heißt  **$n$ -te Partialsumme**.

**Definition.** Konvergiert die Folge  $(s_n)$  der Partialsummen,  $s_n \rightarrow s$ , dann sagt man, dass die unendliche Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergiert, und schreibt

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

D.h. Die Summe einer unendlichen Reihe ist der Grenzwert der Folge der Partialsummen.

**Bemerkung.** Reihen der Form  $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$  können durch Umindizierung auf die "Standardform" gebracht werden, und damit hat die Schreibweise  $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$  ebenfalls eine klare Bedeutung.

**Definition.** Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt **divergent**, wenn sie nicht konvergiert.

**Beispiel 1.**  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots$  (**Geometrische Reihe**)

$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$  und  $qs_n = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$ . Für

$q = 1$  ist  $s_n = n + 1$  und damit ist  $(s_n)$  divergent. Für  $q \neq 1$

ist  $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ . Aus den Eigenschaften der geometrischen Folge

folgt, dass für  $|q| < 1$  die Reihe konvergiert und es gilt  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ .

Für  $|q| \geq 1$  divergiert die Reihe.

**Beispiel 2.**  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots$  (**Teleskop-Reihe**)

Wegen  $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$  ist  $s_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) =$   
 $= 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$ . Also ist die Reihe konvergent.

**Beispiel 3.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$  (**Harmonische Reihe**)

Zu  $k \in \mathbb{N}$  betrachten wir  $\sigma_k = \sum_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{m}$ . Hier gibt es  $2^k - 2^{k-1}$

Summanden und  $\frac{1}{2^k}$  ist der kleinste Summand. Folglich ist

$$\sigma_k \geq (2^k - 2^{k-1}) \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ist nun  $n = 2^k$ , dann ist  $s_n = 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k \geq 1 + \frac{k}{2}$ .

Damit ist  $(s_n)$  **keine** beschränkte Folge, kann also nicht konvergent sein,

und folglich ist die harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  **divergent**.

**Beispiel 4.**  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$

Setze  $c_1 = 1$  und  $c_k = \frac{1}{(k-1)k}$  für  $k \geq 2$ . Dann gilt  $\frac{1}{k^2} \leq c_k \forall k$  und weil

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  konvergent ist (siehe Beispiel 2.), folgt mit dem Vergleichskriterium

(siehe später), dass  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  **konvergent** ist.

Aus bereits erwähnten Aussagen über Folgen ergibt sich sofort

**Satz.** Seien  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  konvergent sowie  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$  ebenfalls konvergent und es gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k .$$

**Beispiel.** (Wir setzen als bekannt voraus, dass  $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$  )

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^k - 5}{4^k k!} = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k - 5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{4}\right)^k = 3e^{1/2} - 5e^{1/4} .$$

Für eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt  $s_{m,n} = \sum_{k=m+1}^n a_k$  mit  $n > m \geq 0$  ein

**Teilstück** der Reihe.

$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$  heißt ein **Endstück** der Reihe bzw. ein **Reihenrest**.

Weil  $s_{m,n} = s_n - s_m$ , ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  genau dann konvergent wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \text{ sodass } |s_{m,n}| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| < \varepsilon \text{ für } n > m > N_\varepsilon .$$

Ist speziell  $n = m + 1$ , dann ist  $|s_{m,m+1}| = |a_{m+1}|$ . Dies liefert ein **notwendiges Kriterium** für die Konvergenz einer Reihe :

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent  $\Rightarrow (a_k)$  ist eine Nullfolge.

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$  konvergent. Wegen  $s - s_m = r_m$ , muß die Folge der Reihenreste  $(r_m)$  eine Nullfolge sein, d.h. der "Reihenrest kann beliebig klein gemacht werden".

Offenbar ändert sich das Konvergenzverhalten einer Reihe nicht, wenn **endlich viele** Summanden weggelassen, hinzugefügt oder abgeändert werden.

**Definition.** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt **absolut konvergent**, wenn  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergiert.

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  heißt **bedingt konvergent**, wenn die Reihe konvergiert, aber nicht absolut konvergent ist.

**Bemerkungen.** (i) Hat eine reelle Reihe nur positive Summanden, dann sind Konvergenz und absolute Konvergenz gleichbedeutend.

(ii) Wegen  $|s_{m,n}| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k|$  folgt aus der absoluten Konvergenz auch die Konvergenz der Reihe.

**Beispiel.**  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$  ist konvergent (siehe später) aber nicht absolut konvergent.

**Satz. (Vergleichskriterium)** Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  gegeben.

1) Gilt  $|a_k| \leq c_k$  für fast alle  $k$  und ist  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  konvergent, dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergent. ( $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$  heißt dann eine konvergente **Majorante** von  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ )

2) Gilt  $a_k \geq d_k \geq 0$  für fast alle  $k$  und ist  $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$  divergent, dann

ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent. ( $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$  heißt dann eine divergente **Minorante** von  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ )

**Beweis.** 1) folgt aus  $\sum_{k=m+1}^n |a_k| \leq \sum_{k=m+1}^n c_k$ .

zu 2) : Wäre  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$  konvergent, dann wegen 1) auch  $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ , ein Widerspruch.  $\square$

### Beispiele.

1) Betrachte  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{5}{k2^k}$ . Wegen  $|a_k| = \frac{5}{k2^k} \leq 5 \cdot \frac{1}{2^k}$  ist die geometrische Reihe  $5 \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^k$  eine konvergente Majorante, also ist die gegebene Reihe absolut konvergent.

2) Betrachte  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{k}}{k}$ . Wegen  $a_k = \frac{1+\sqrt{k}}{k} > \frac{1}{k}$ , ist die harmonische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  eine divergente Minorante, also ist die gegebene Reihe divergent.

3) Betrachte  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$ . Wegen  $|a_k| = \frac{k!}{k^k} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}{k \cdot k \cdot k \cdots k} = \frac{2}{k^2} \cdot \frac{3}{k} \cdot \frac{4}{k} \cdots \frac{k}{k} < \frac{2}{k^2}$  ist  $2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  eine konvergente Majorante der gegebenen Reihe, welche somit konvergiert.

**Bemerkung.** Bei zahlreichen reellen Reihen sind die einzelnen Reihenglieder  $\geq 0$ . In diesem Fall ist die Folge der Partialsummen monoton steigend.

Somit konvergiert eine derartige Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  genau dann, wenn die Folge  $(s_n)$  der Partialsummen (nach oben) beschränkt ist.

Ohne Beweis sei ein weiteres Ergebnis angeführt.

**Satz. (Verdichtungssatz von Cauchy)**

Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  gegeben, wobei  $a_k \geq 0 \quad \forall k$  und die Folge  $(a_k)$  monoton fallend ist.

Dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  konvergent genau dann, wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$  konvergiert.

**Beispiel.** Betrachte  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ .

Für  $\alpha \leq 0$  bilden die Reihenglieder keine Nullfolge, daher ist in diesem Fall die Reihe divergent.

Für  $\alpha > 0$  bilden die Reihenglieder eine monoton fallende Nullfolge, sodass der Verdichtungssatz anwendbar ist, d.h. wir betrachten die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k.$$

Dies ist aber eine geometrische Reihe, die nur für  $2^{1-\alpha} < 1$  konvergiert.

Also konvergiert die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  nur für  $\alpha > 1$ . Im besonderen konvergiert damit etwa die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ .  $\square$

Ein weiteres wichtiges Kriterium sei ebenfalls ohne Beweis angeführt.

**Satz. (Grenzwertkriterium)**

Seien  $(a_k)$  und  $(b_k)$  Folgen positiver reeller Zahlen. Gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = l$  mit  $0 < l < \infty$ , dann sind die beiden Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  entweder beide konvergent oder beide divergent.

**Beispiel.** Betrachte  $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$  mit  $a_k = \frac{k^2 - 2k + 5}{k^4 - 3k^2 + 2k}$ . Wähle  $b_k = \frac{1}{k^2}$ .

Dann gilt  $\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^4 - 2k^3 + 5k^2}{k^4 - 3k^2 + 2k} = \frac{1 - \frac{2}{k} + \frac{5}{k^2}}{1 - \frac{3}{k^2} + \frac{2}{k^3}} \rightarrow 1$  und somit ist  $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$  konvergent.

Im folgenden werden zwei wichtige Kriterien für die absolute Konvergenz einer Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  diskutiert, nämlich das Wurzelkriterium und das Quotientenkriterium.

**Satz. (Wurzelkriterium)**

- 1)  $\exists q \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq q < 1$  und  $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$  für fast alle  $k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist absolut konvergent.
- 2) Gilt  $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$  für unendlich viele  $k$ , dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent.
- 3) Gilt weder 1) noch 2), dann ist (vorderhand) keine Aussage möglich.

**Beweis.**

zu 1) : Es gilt  $|a_k| \leq q^k$  für fast alle  $k$ , und damit ist die geometrische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$  wegen  $q < 1$  eine konvergente Majorante.

zu 2) : Gilt  $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$  für unendlich viele  $k$ , dann kann  $(a_k)$  keine Nullfolge sein, also ist die Reihe divergent.

zu 3) : Die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  erfüllen weder 1) noch 2), jedoch ist die erste Reihe konvergent und die zweite Reihe divergent.  $\square$

**Satz. (Quotientenkriterium)**

- 1)  $\exists q \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq q < 1$  und  $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q$  für fast alle  $k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$  ist absolut konvergent.
- 2) Gilt  $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \geq 1$  für fast alle  $k$ , dann ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  divergent.
- 3) Gilt weder 1) noch 2), dann ist (vorderhand) keine Aussage möglich.

## Beweis.

zu 1) : Es gelte  $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q < 1$  für  $k > N$ . Dann ist für  $k > N$

$$|a_k| = \left| \frac{a_k}{a_{k-1}} \right| \left| \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \right| \dots \left| \frac{a_{N+1}}{a_N} \right| |a_N| \leq q^{k-N} |a_N| = \left| \frac{a_N}{q^N} \right| q^k = cq^k.$$

Wiederum ist die geometrische Reihe  $c \sum_{k=1}^{\infty} q^k$  eine konvergente Majorante.

zu 2) : Gilt  $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \geq 1$  für fast alle  $k$ , dann kann  $(a_k)$  keine Nullfolge sein, also ist die Reihe divergent.

zu 3) : Die Reihen  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  und  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  erfüllen weder 1) noch 2), jedoch ist die erste Reihe konvergent und die zweite Reihe divergent.  $\square$

**Wichtige Bemerkung.** Ist die Folge  $(\sqrt[k]{|a_k|})$  (bzw.  $(|\frac{a_{k+1}}{a_k}|)$ ) im besonderen konvergent (was ja nicht immer der Fall sein muß), also etwa  $\sqrt[k]{|a_k|} \rightarrow q$  (bzw.  $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \rightarrow q$ ), dann liegt für  $q < 1$  absolute Konvergenz vor, für  $q > 1$  Divergenz, und für  $q = 1$  ist keine Aussage möglich.

## Beispiele.

(a) Betrachte  $\sum_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-k}$ . Dann ist  $|a_k| = \frac{k^4}{e^k}$  und

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{e} (\sqrt[k]{k})^4 \rightarrow \frac{1}{e} < 1. \text{ Also ist die Reihe absolut konvergent.}$$

(b) Für welche  $x \in \mathbb{R}$  ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$  konvergent?

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \frac{[(k+1)!]^2 (2k)! |x|^{k+1}}{(2k+2)! (k!)^2 |x|^k} = \frac{(k+1)^2 |x|}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{(1+\frac{1}{k})^2 |x|}{(2+\frac{1}{k})(2+\frac{2}{k})} \rightarrow \frac{|x|}{4} \text{ für } k \rightarrow \infty.$$

Somit ist die Reihe absolut konvergent für  $\frac{|x|}{4} < 1$ , i.e. für  $|x| < 4$ , und divergent für  $|x| > 4$ .

Für die Randpunkte  $x = \pm 4$  ist eine gesonderte Untersuchung erforderlich.



**Definition.** Die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  heißt **alternierend**, wenn zwei aufeinanderfolgende Summanden verschiedenes Vorzeichen haben. Somit kann eine derartige Reihe in der Form  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$  mit  $a_k \geq 0$  geschrieben werden.

Für alternierende Reihen gilt folgendes wichtige hinreichende Kriterium

**Satz. (Leibniz-Kriterium)**

Sei die alternierende Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$  gegeben.

- 1) Ist  $(a_k)$  eine monotone Nullfolge, dann konvergiert die Reihe.
- 2) Ist  $s = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ , dann gilt für die Teilsumme  $s_n$  die Abschätzung  $|s_n - s| \leq a_{n+1}$ .

**Beispiel.** Betrachte  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}$ . Für  $\alpha > 0$  bildet die Folge  $(\frac{1}{k^\alpha})$  eine monoton fallende Nullfolge, und damit ist die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.

Im speziellen ist die Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$  konvergent.

**Weitere Bemerkungen.**

- 1) Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  gegeben, und  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  eine bijektive Abbildung.

Wir setzen  $b_k = a_{\varphi(k)} \quad \forall k$ . Dann heißt  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  eine **Umordnung** von

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Es gilt (ohne Beweis) :

(i) Ist  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut konvergent zur Summe  $s$ , dann konvergiert auch jede Umordnung von  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  absolut und hat die gleiche Summe  $s$ .

(ii) (Umordnungssatz von Riemann) Sei  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  bedingt konvergent und  $t \in \mathbb{R}$ . Dann gibt es eine Umordnung  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  von  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  mit der Summe  $t$ .

2) Seien die Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  mit Summen  $s$  bzw.  $t$  gegeben.

Wir wollen die beiden Reihen in geeigneter Weise "multiplizieren" und als Ergebnis wieder eine Reihe erhalten. Dafür gibt es grundsätzlich mehrere Möglichkeiten.

Wir setzen  $c_k = \sum_{i=0}^k a_{k-i} b_i = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \dots + a_0 b_k$  für alle  $k \geq 0$ .

Also  $c_0 = a_0 b_0$ ,  $c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$ ,  $c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$  etc.

Die dadurch erhaltene Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  heißt das **Cauchy-Produkt** der Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ .

(Das Cauchy-Produkt tritt in natürlicher Weise bei der Produktbildung zweier Potenzreihen auf.)

**Es gilt :** Ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent zur Summe  $s$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent zur Summe  $t$ , dann konvergiert das Cauchy-Produkt der beiden Reihen zur Summe  $st$ .

**Bemerkung.** Auf analoge Weise kann die Konvergenz von komplexen Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k$$

erklärt werden.

Ist  $z_k = x_k + iy_k$  dann ist  $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$  offenbar genau dann konvergent wenn

$\sum_{k=0}^{\infty} x_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} y_k$  konvergieren, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k + i \sum_{k=0}^{\infty} y_k .$$

Des weiteren können etwa das Wurzelkriterium und das Quotientenkriterium verwendet werden, um über die absolute Konvergenz einer Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$  Auskunft zu erhalten (weil die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$  eine reelle Reihe mit positiven Reihengliedern ist).