

Unbestimmte Ausdrücke

Die Bestimmung von Grenzwerten von Funktionen ist manchmal nicht direkt möglich.

Dies ist etwa dann der Fall wenn z.B. der Grenzwert eines Quotienten $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ an einer Stelle x_0 bestimmt werden soll, und es gilt $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ **und** $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ (oder $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ **und** $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$).

Man nennt diese Ausdrücke ”**unbestimmte Ausdrücke**”, weil vorderhand keine Aussage möglich ist.

Beispiel. Betrachten wir etwa $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x}$, dann streben sowohl Zähler als auch Nenner gegen Null. Offenbar gilt $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$.

Im Falle von $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2}$ streben Zähler und Nenner ebenfalls gegen Null. Nun gilt aber offenbar $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} = +\infty$.

Weiteres Beispiel. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$.

Weitere unbestimmte Ausdrücke, außer den genannten $\left(\frac{0}{0}\right)$ und $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ wären etwa (1^∞) , (0^0) , (∞^0) , $(0 \cdot \infty)$ und $(\infty - \infty)$. Sie lassen sich allerdings auf die beiden Grundfälle zurückführen.

Ohne Beweis sei die folgende wichtige Aussage angeführt.

Satz. (Regel von de l’Hospital)

Seien f und g (geeignet) differenzierbar auf einem Intervall und gelte

$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ mit $\lim_{x \rightarrow b} g'(x) \neq 0$. Dann folgt aus

$\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = 0$ **oder** $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = \lim_{x \rightarrow b} g(x) = \infty$

die Aussage

$$\lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Bemerkungen.

1) Die Aussage gilt auch, falls $b = +\infty$ (bzw. $b = -\infty$) ist. Wir setzen $x = \frac{1}{t}$ und erhalten

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})(-t^{-2})}{g'(\frac{1}{t})(-t^{-2})} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2) Die Aussage gilt auch für den Fall $l = \pm\infty$, weil $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{f'(x)} \rightarrow 0^+$ und $\frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow -\infty \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{f'(x)} \rightarrow 0^-$.

3) Hat man nach einmaliger Anwendung wiederum einen unbestimmten Ausdruck, kann der Satz wiederum auf die Funktionen f' und g' angewendet werden, sofern die entsprechenden Voraussetzungen vorliegen.

4) $f(x)g(x) = (0 \cdot \infty)$ kann übergeführt werden in $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left(\frac{0}{0}\right)$ oder in $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$.

5) $f(x)^{g(x)} = (1^\infty)$ oder (0^0) oder (∞^0) können durch

$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x) \ln f(x)} = e^{\lim g(x) \ln f(x)}$ auf zuvor diskutierte Fälle zurückgeführt werden.

6) Ausdrücke der Form $f(x) - g(x) = (\infty - \infty)$ müssen zuerst in eine der zuvor erwähnten Formen gebracht werden, um damit weiter arbeiten zu können.

Beispiele.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x + x \sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin x + \sin x + x \cos x} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \sin x + x \cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2 \cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{1}{3}$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)^x = (0^0) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \ln(e^x - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(e^x - 1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(e^x - 1) &= (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x - 1)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e^x - 1} e^x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x^2 e^x}{e^x - 1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{2xe^x + x^2 e^x}{e^x} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Somit ist } \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 1)^x = e^0 = 1 .$$

$$\begin{aligned} d) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x-1}) &= (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x-1}) \frac{x + \sqrt{x-1}}{x + \sqrt{x-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x + \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x-1}{1 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \infty . \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Regel von de l'Hospital kann auch verwendet werden, um Grenzwerte von Folgen zu bestimmen.

$$\text{Beispiel. } a_n = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+2}{2(x+1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{Beispiel. } a_n = \sqrt[n]{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{x} \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 . \text{ Damit } \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1 .$$