Der n-dimensionale Raum

Mittels $\mathbb{R}$ kann nur eine Größe beschrieben werden. Um den Ort eines Teilchens im Raum festzulegen, werden schon drei Größen benötigt. Interessiert man sich für den Bewegungszustand eines Teilchens, werden neben den drei Raumkoordinaten auch die jeweiligen Geschwindigkeiten in Richtung dieser Raumkoordinaten benötigt, d.h. wir benötigen ein Objekt, das aus sechs reellen Zahlen aufgebaut ist. Nicht nur aus diesem Grund betrachten wir nun allgemein die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen,

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{R}\}$$

Im Falle von $n = 1, 2, 3$ gibt es einfache geometrische Veranschaulichungen. Für Elemente des $\mathbb{R}^n$ können wir eine Addition und eine Multiplikation mit reellen Zahlen definieren.

Seien $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $x = y \quad \Leftrightarrow \quad x_i = y_i \quad \forall \ i = 1, 2, ..., n$
- $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$
- $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$.

Mit diesen beiden Operationen wird der $\mathbb{R}^n$ zu einem **Vektorraum** über dem Körper $\mathbb{R}$ (siehe LV Lineare Algebra).

Wie bereits erwähnt, heißt

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

die **Norm** (bzw. die Länge, der Absolutbetrag) von $x \in \mathbb{R}^n$.

Man beachte, dass die Norm im Fall $n = 1$ (bzw. $n = 2$) mit dem Betrag reeller Zahlen (bzw. komplexer Zahlen) übereinstimmt.

Ebenso wurde erwähnt, dass für $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ das **Skalarprodukt** von x und y erklärt ist durch

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad .$$

Dabei gilt: $\langle x, y \rangle = 0$, wenn $x = 0$ oder $y = 0$,

$\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$,

$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ für $\lambda \in \mathbb{R}$,

$\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ bzw. $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Eine fundamentale Eigenschaft des Skalarproduktes wird durch die **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung** ausgedrückt.

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \quad \text{bzw.} \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad \forall\, x, y$$

Beweisskizze. Der Fall $y = 0$ ist trivial, sei also $y \neq 0$.

Für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $0 \leq \langle x - \lambda y, x - \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle - 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle$.

Mit $\lambda = \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ folgt sofort die Behauptung. $\square$

Daraus ergeben sich sofort die zentralen Eigenschaften der Norm (des Absolutbetrages).

(i) $|x_i| \leq \|x\| \quad \forall\, i$

(ii) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 = (0, 0, ..., 0)$

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Dreiecksungleichung)

Beweis. zu (iv):

$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq$

$\|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$.

Durch Wurzelziehen folgt die Behauptung. $\square$

Aus der Norm wiederum erhalten wir eine Metrik für $\mathbb{R}^n$.

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

Bemerkungen.

(i) Mit der Metrik stehen damit auch ε-Kugeln, Umgebungen, offene Mengen und abgeschlossene Mengen im $\mathbb{R}^n$ zur Verfügung.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **kompakt**, wenn A abgeschlossen und beschränkt (i.e. $\exists\ M > 0$ mit $\|x\| \leq M \quad \forall\ x \in A$) ist.

In weiterer Folge können in zuvor erwähnter Weise konvergente Folgen und stetige Abbildungen betrachtet werden.

(ii) Die vorher betrachtete Norm $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ mit korrespondierender Metrik $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ heißt auch **euklidische Norm** bzw. **euklidische Metrik**.

Daneben gibt es noch eine weitere wichtige Norm, nämlich die sogenannte **Maximumsnorm**, welche durch

$\|x\| = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ gegeben ist.

Die zugehörige Metrik (**Maximumsmetrik**) ist dann offenbar durch

$d(x,y) = \|x-y\| = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$ gegeben.

Man kann zeigen, dass beide Metriken dieselben offenen Mengen und konvergenten Folgen liefern, also in diesem Sinne äquivalent sind.

(iii) Sei (x^k) mit $x^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$ eine Folge im $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$\lim\limits_{k\to\infty} x^k = x$ (i.e. $\|x^k - x\| \to 0$) $\quad\Leftrightarrow\quad \lim\limits_{k\to\infty} x_i^k = x_i \quad \forall\ i = 1, 2, ..., n$

(D.h. $x^k \to x \quad\Leftrightarrow\quad$ die i-ten Koordinatenfolgen konvergieren gegen x_i)

Beispiel.

$(\frac{1}{k}, 2 - \frac{1}{k^2}, \sin\frac{1}{k}) \to (0,2,0)$, weil $\frac{1}{k} \to 0$, $2 - \frac{1}{k^2} \to 2$, $\sin\frac{1}{k} \to 0$ für $k \to \infty$.

(iv) **Satz.** $\mathbb{R}^n$ ist vollständig.

Beweis. Sei (x^k) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}^n$. Wegen $|x_i^k - x_i^l| \leq \|x^k - x^l\|$ für jedes feste i , ist dann (x_i^k) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, welche gegen einen Wert x_i konvergiert. Diese x_i lassen sich zu einem Punkt $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ zusammensetzen. Wegen der Aussage vorher gilt dann $x^k \to x$. Also ist $\mathbb{R}^n$ vollständig. $\square$

(v) Die Stetigkeit einer Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an einer Stelle (x_0, y_0) läßt sich gemäß dem Vorherigen so beschreiben :

zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_\varepsilon > 0$, sodass aus $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta_\varepsilon$ folgt dass $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$.

Analog zum eindimensionalen Fall gilt, dass $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ genau dann stetig in (x_0, y_0) ist, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$ und jede Folge (y_n) mit $y_n \to y_0$ gilt dass $f(x_n, y_n) \to f(x_0, y_0)$.

Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nennt man auch eine reellwertige Funktion von n reellen Variablen, bzw. eine **Skalarfunktion**, bzw. auch ein **Skalarfeld**.

Eine Abbildung $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt auch eine vektorwertige Funktion von n reellen Variablen, bzw. ein **Vektorfeld**.

Reellwertige Funktionen von 2 reellen Variablen lassen sich ebenfalls durch ihren "Graphen" veranschaulichen, der eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist,

$$S_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in D(f) \ , \ z = f(x,y)\} \ .$$

Beispiele.

(i) $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$, $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ ...

obere Halbkugel mit Radius 1

(ii) $D(f) = \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ... Kegel um die z-Achse

Ein Element $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ können wir einerseits als die Koordinaten eines Punktes $a \in \mathbb{R}^n$ interpretieren, und wir schreiben in diesem Fall

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \ .$$

Andererseits wird durch $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ auch eine **Richtung** definiert, nämlich jene vom Ursprung $(0, \ldots, 0)$ zum Punkt $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. In diesem Fall spricht man von einem **Richtungsvektor** und man schreibt

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \ .$$

Die Verwendung beider Betrachtungsweisen erlaubt es, gewisse Sachverhalte anschaulicher darzustellen, etwa den Begriff der Translation.

Sei $\vec{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Die Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T(x) = x + \vec{a}$, i.e.

$(x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto (x_1 + a_1, x_2 + a_2, ..., x_n + a_n)$ heißt **Translation**

($\vec{a}$ ist dabei der sogenannte **Verschiebungsvektor**).

Weitere wichtige Begriffe seien hier nur kurz aufgeführt.

1) Zu $x \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{0} \neq \vec{a}$ heißt

$$\{z \in \mathbb{R}^n \ : \ z = x + \lambda\vec{a} \ , \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

die durch $\vec{a}$ definierte **Gerade** durch den Punkt x . ($\vec{a}$ ist dabei der sogenannte **Richtungsvektor** der Geraden)

2) Ist $x \in \mathbb{R}^n$ und sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ linear unabhängig (siehe Lineare Algebra), dann heißt die Menge

$\{z \in \mathbb{R}^n \ : \ z = x + \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_k\vec{a}_k \ , \ \lambda_i \in \mathbb{R}\}$

der von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k$ aufgespannte k-dimensionale **affine Unterraum** durch den Punkt x (bzw. k-dimensionale Ebene durch x). Im Falle von $k = n-1$ spricht man auch von einer **Hyperebene**.

3) Zu $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißt

$\overline{xy} = \{z \in \mathbb{R}^n \ : \ z = x + \lambda(y - x) \ , \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$

die **Verbindungsstrecke** von x und y .

4) Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke enthält, d.h.

$\forall \ x, y \in X \ \ \forall \lambda \in [0,1] \ : \ (1-\lambda)x + \lambda y \in X$

Wir betrachten abschließend vektorwertige Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

So kann etwa eine Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ derartig interpretiert werden, dass einem Ortspunkt $x \in D(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Geschwindigkeitsvektor zugeordnet wird.

Sei nun $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine vektorwertige Funktion, i.e.

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \ \mapsto \ f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= (f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

Die auftretenden Funktionen $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m$ heißen dabei auch **Koordinatenfunktionen** von f und man schreibt in diesem Fall oft

$f = (f_1, ..., f_m)$ bzw. verwendet die Vektorschreibweise $\vec{y} = \vec{f}(\vec{x})$.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y) = (\sin(x+y), e^{xy}, x-y)$.

Dann ist $f_1(x,y) = \sin(x+y)$, $f_2(x,y) = e^{xy}$, $f_3(x,y) = x - y$.

Mit dem Folgenkriterium der Stetigkeit und dem Satz über die koordinatenweise Konvergenz folgt (fast) unmittelbar

Satz. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann stetig an $x \in D(f)$ wenn f_i stetig an x ist für jedes $1 \leq i \leq m$.

(Vgl. Lineare Algebra) Die einfachsten Abbildungen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sind die linearen Abbildungen, i.e. Abbildungen der Form

$$y_1 = f_1(x_1, ..., x_n) = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n$$

$$y_2 = f_2(x_1, ..., x_n) = a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n$$

...

$$y_m = f_m(x_1, ..., x_n) = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \ .$$

Lineare Abbildungen lassen sich auch in der kompakten Form $y = Ax$ angeben, wobei A eine $m \times n$ Matrix ist.

Satz. Jede lineare Abbildung ist stetig.

Beweis. Sei $y = Ax$ eine lineare Abbildung, wobei A eine $m \times n$ Matrix ist. Sei weiters $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon > 0$.

Wähle $M > 0$ mit $|a_{ij}| \leq M \ \ \forall\, i, j$.

Dann ist $|f_i(\hat{x}) - f_i(x)| = |a_{i1}(\hat{x}_1 - x_1) + \ldots + a_{in}(\hat{x}_n - x_n)| \leq$

$\leq M(|\hat{x}_1 - x_1| + \ldots + |\hat{x}_n - x_n|) \leq Mn\|\hat{x} - x\|$ (Maximumsnorm) .

Mit der Wahl von $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{Mn}$ erhalten wir die Stetigkeit in x . $\square$