

Richtungsgrenzwerte, partielle Ableitungen

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gegeben. Wir untersuchen das Verhalten von f entlang einer Geraden durch einen Punkt x^0 ,

$$\{x \in \mathbb{R}^n : x = x^0 + h\vec{a}, \|\vec{a}\| = 1, h \in \mathbb{R}\}.$$

In diesem Fall hängt dann f lediglich vom Geradenparameter h ab. Man beachte, dass in obiger Darstellung die Geradenrichtung durch einen **Einheitsvektor** angegeben wird.

• Falls existent, heißt $b = \lim_{h \rightarrow 0} f(x^0 + h\vec{a})$ der **Grenzwert von f an x^0 in Richtung \vec{a}** .

• f heißt **stetig in x^0 in Richtung \vec{a}** , wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x^0 + h\vec{a}) = f(x^0).$$

Beispiel. Betrachte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{und } x^0 = (0, 0).$$

Für $\vec{a} = (a_1, a_2)$ gilt

$$f(x^0 + h\vec{a}) = f(ha_1, ha_2) = \frac{ha_1h^2a_2^2}{h^2a_1^2+h^4a_2^4} = \frac{ha_1a_2^2}{a_1^2+h^2a_2^4} \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

(Betrachte dabei die Fälle $a_1 = 0$ und $a_1 \neq 0$)

Somit ist f stetig in jeder Richtung \vec{a} .

Betrachten wir nun die Folge $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$ mit $x_n = \frac{1}{n^2}$, $y_n = \frac{1}{n}$, dann erhalten wir

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Dies bedeutet aber, dass f in x^0 unstetig ist.

Nun interessiert uns die **Änderungsrate** einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ an einer Stelle x^0 in Richtung \vec{a} (mit $\|\vec{a}\| = 1$).

Definition. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt an einem (inneren) Punkt $x^0 \in D(f)$ **differenzierbar in Richtung \vec{a}** , wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + h\vec{a}) - f(x^0)}{h}$$

existiert.

Er heißt **Richtungsableitung** von f an x^0 in Richtung \vec{a} .

Schreibweise: $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0)$.

Für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bietet sich hierzu eine geometrische Deutung an: der Graph von f ist eine Fläche im \mathbb{R}^3 . Das Bild der Geraden durch x^0 in Richtung \vec{a} ist dann eine Kurve auf dieser Fläche. Die Richtungsableitung von f an x^0 in Richtung \vec{a} beschreibt dann die Steigung der Tangente an diese Kurve im Punkt $(x^0, f(x^0))$.

Bemerkung. Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ an x^0 in Richtung \vec{a} differenzierbar, dann auch in Richtung $-\vec{a}$ und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial(-\vec{a})}(x^0) = -\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0).$$

Bemerkung. Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ an x^0 in Richtung \vec{a} differenzierbar, dann ist f auch stetig in Richtung \vec{a} .

Beweis.

$$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x^0 + h\vec{a}) - f(x^0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x^0 + h\vec{a}) - f(x^0)}{h} h \right) = \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0) \cdot 0 = 0. \quad \square$$

Dass aus der Richtungs-differenzierbarkeit i.a. nicht die Stetigkeit folgt, zeigt wiederum das vorherige Beispiel

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{und } x^0 = (0, 0).$$

$$\text{Für } \vec{a} = (a_1, a_2) \text{ ist } \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0) = \begin{cases} \frac{a_2^2}{a_1} & \text{falls } a_1 \neq 0 \\ 0 & \text{falls } a_1 = 0 \end{cases}.$$

Somit existieren zwar alle Richtungsableitungen, aber f ist in $x^0 = (0, 0)$ nicht stetig.

Durch die kanonischen Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ des \mathbb{R}^n sind gewisse Richtungen ausgezeichnet.

Definition. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt an einem (inneren) Punkt $x^0 \in D(f)$ **partiell differenzierbar** (nach der k -ten Variablen), wenn die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{e}_k}(x^0)$ existiert.

Wir verwenden dabei die Schreibweisen $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0)$ bzw. $f_{x_k}(x^0)$.

$$\begin{aligned} \text{Wegen } \frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + h\vec{e}_k) - f(x^0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0 + h, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_{k-1}^0, x_k^0, x_{k+1}^0, \dots, x_n^0)}{h} \end{aligned}$$

bildet man die partielle Ableitung nach x_k so, indem alle Variablen bis auf x_k als konstant betrachtet werden und die gewöhnliche Ableitung nach x_k gebildet wird.

Beispiel.

Sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x^2y - z^3$, und sei $x^0 = (1, 1, 0)$.

Dann ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x^0) = 2xy|_{(1,1,0)} = 2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x^0) = x^2|_{(1,1,0)} = 1$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(x^0) = -3z^2|_{(1,1,0)} = 0$.

Satz. (ohne Beweis)

Existieren für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von x^0 die partiellen Ableitungen $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$, und sind diese dort beschränkt, dann ist f stetig an x^0 .

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und es mögen alle partiellen Ableitungen an $x^0 \in D(f)$ existieren. Dann können wir diese als Komponenten eines Vektors auffassen.

Definition.

$$\operatorname{grad} f(x^0) = \operatorname{grad} f|_{x^0} = (f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n})|_{x^0}$$

heißt der **Gradient** von f an x^0 .

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = e^{xy}$.

Dann ist $f_x = ye^{xy}$ und $f_y = xe^{xy}$, also $\operatorname{grad} f = (ye^{xy}, xe^{xy})$.

Im besonderen ist $\operatorname{grad} f|_{(1,2)} = (2e^2, e^2)$.