Mittelwertsatz, Satz von Taylor

Satz. (**1. Mittelwertsatz**)
Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar auf der offenen Menge $X \subseteq D(f)$. Ferner seien $p, q \in X$, sodass die Verbindungsstrecke $\overline{pq}$ zwischen p und q in X liegt.

Dann existiert ein $\vartheta \in (0,1)$ mit

$$f(q) - f(p) = \mathrm{grad} f(p + \vartheta(\vec{q} - \vec{p})) \cdot (\vec{q} - \vec{p}) \ .$$

Beweis.
Für $x \in \overline{pq}$ ist $x = p + t(\vec{q} - \vec{p})$ für ein geeignetes $t \in [0,1]$.

Betrachte nun $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $F(t) = f(p + t(\vec{q} - \vec{p}))$.

Dann ist F stetig und auf $(0,1)$ differenzierbar. Damit sind aber die Voraussetzungen des 1. MWS für Funktionen einer reellen Variablen erfüllt und es gilt $F(1) - F(0) = F'(\vartheta)$ für ein geeignetes $\vartheta \in (0,1)$.

Mit der Kettenregel gilt dann

$$F(1) - F(0) = f(q) - f(p) = \mathrm{grad} f(p + \vartheta(\vec{q} - \vec{p})) \cdot (\vec{q} - \vec{p}) \ . \quad \square$$

Folgerung. Auf konvexen Teilmengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt der 1. MWS für jede Funktion $f \in C^1(X)$.

Bemerkung. (Veranschaulichung im $\mathbb{R}^2$)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $p = (x_1, y_1)$ und $q = (x_2, y_2)$. Dann ist

$p + \vartheta(\vec{q} - \vec{p}) = (x_1 + \vartheta(x_2 - x_1), y_1 + \vartheta(y_2 - y_1)) = (\xi, \eta)$.

Sind also die Voraussetzungen des 1. MWS erfüllt, dann existiert ein $\vartheta \in (0,1)$ mit

$f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1) = f_x|_{(\xi,\eta)} (x_2 - x_1) + f_y|_{(\xi,\eta)} (y_2 - y_1)$.

Im eindimensionalen Fall gilt, dass eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion mit verschwindender Ableitung dort konstant sein muss.

Die entsprechende Verallgemeinerung von "Intervall" ist nun die folgende wichtige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

Definition. Eine **offene** Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein **Gebiet**, wenn für alle $x, y \in G$ $\exists\ x = x^1, x^2, ..., x^m = y$ mit $\overline{x^i x^{i+1}} \subseteq G$ für $i = 1, 2, ..., m-1$.

(D.h. je zwei Punkte von G können durch einen Streckenzug verbunden werden)

Satz. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, G ein Gebiet und $f \in C^1(G)$. Dann gilt

$$f \text{ ist konstant auf } G \quad \Leftrightarrow \quad \text{grad} f(x) = \vec{0} \quad \forall\ x \in G .$$

Beweis. Ist f konstant, dann ist offenbar $\text{grad} f(x) = \vec{0}\ \ \forall\ x \in G$.

Zum Beweis der Umkehrung wähle $x, y \in G$ und weitere Punkte $x^2, ..., x^{m-1}$ wobei $x = x^1$, $y = x^m$ und $\overline{x^i x^{i+1}} \subseteq G$ für $i = 1, 2, ..., m-1$.

Sukzessive Anwendung des 1. MWS liefert $f(x^{i+1}) = f(x^i)$ und schließlich $f(x) = f(y)$. $\square$

Wie im eindimensionalen Fall läßt sich eine Funktion $f \in C^{m+1}(X)$ durch ein Polynom (in n Variablen) vom Grad m approximieren.

Dazu betrachten wir für $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ den Differentialoperator $\vec{h} \cdot \text{grad}$, der einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^1(X)$ die Funktion

$$(\vec{h} \cdot \text{grad}) f(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

zuordnet.

Für $k \in \mathbb{N}$ ist dann $(\vec{h} \cdot \text{grad})^k$, die k-fache Anwendung des Differentialoperators, für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f \in C^k(X)$ gegeben durch

$$(\vec{h} \cdot \text{grad})^k f(x) = \sum_{\nu_1=1}^{n} \sum_{\nu_2=1}^{n} \ldots \sum_{\nu_k=1}^{n} h_{\nu_1} h_{\nu_2} \ldots h_{\nu_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{\nu_1} \partial x_{\nu_2} \ldots \partial x_{\nu_k}}(x) .$$

Satz. (**TAYLOR**)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $f \in C^{m+1}(X)$. Weiters seien $x^0, x \in X$ mit $\overline{x^0 x} \subseteq X$.

Dann gilt mit $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}^0$ und einem geeigneten $\vartheta \in (0,1)$

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\left((\vec{h} \cdot \mathrm{grad})^k f(x^0)\right)}{k!} + \frac{1}{(m+1)!} \left((\vec{h} \cdot \mathrm{grad})^{m+1} f(x)\right)\Big|_{x = x^0 + \vartheta \vec{h}}$$

Bemerkungen.

(i) Für $m = 0$ ergibt sich der Mittelwertsatz als Spezialfall des Satzes von Taylor.

(ii) Für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $m = 1$ erhalten wir

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) =$$

$$= f(x_0, y_0) + h f_x(x_0, y_0) + k f_y(x_0, y_0) + \tfrac{1}{2!}(h^2 f_{xx}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) +$$

$$+ 2hk f_{xy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k) + k^2 f_{yy}(x_0 + \vartheta h, y_0 + \vartheta k)) \; .$$

(iii) Das Taylorpolynom 2. Ordnung einer Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ um den Entwicklungspunkt (x_0, y_0, z_0) wäre dann etwa

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2, z_0 + h_3) = f(x_0, y_0, z_0) +$$

$$+ h_1 f_x(x_0, y_0, z_0) + h_2 f_y(x_0, y_0, z_0) + h_3 f_z(x_0, y_0, z_0) +$$

$$+ \tfrac{1}{2!}[h_1^2 f_{xx} + 2h_1 h_2 f_{xy} + 2h_1 h_3 f_{xz} + h_2^2 f_{yy} + 2h_2 h_3 f_{yz} + h_3^2 f_{zz}]\,|_{(x_0, y_0, z_0)}$$

(iv) Wie im eindimensionalen Fall schreibt man bisweilen

$$f(x) = T_m(x, x^0) + R_m(x, x^0) \; .$$

Für $f \in C^\infty(X)$ sind die $T_m(x, x^0)$ die Partialsummen der Taylor-Reihe. Diese stellt die Funktion f dar, wenn $\lim\limits_{m \to \infty} R_m = 0$.

Der Begriff des totalen Differenzials kann ebenfalls auf Funktionen mehrerer Veränderlicher erweitert werden. Dies sei am Beispiel einer Funktion von zwei Veränderlichen erläutert.

Mit Hilfe des Satzes von Taylor können wir schreiben

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \text{Rest}$$

Die tatsächliche Änderung des Funktionswertes ist

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \text{Rest}$$

Der lineare Anteil der tatsächlichen Veränderung wird mit der weiteren Setzung $\Delta x = dx$ und $\Delta y = dy$ als **totales Differenzial** df bezeichnet, also

$$df = f_x dx + f_y dy \ .$$

Bemerkung. Im Falle einer Funktion von drei Veränderlichen erhalten wir dann für das totale Differenzial

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz \ .$$