

Bogenlänge ebener Kurven

Hat man eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, dann stellt der Graph von f ,

$$C_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), x \in [a, b]\},$$

i.a. eine Kurve im \mathbb{R}^2 dar.

Einer derartigen Kurve soll nun eine "Länge" zugeordnet werden, wobei zu beachten ist, dass a priori nur für Strecken bzw. (in weiterer Folge für) Polygonzüge im \mathbb{R}^2 eine Länge erklärt ist.

Sei $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ eine Partition des Intervalls $[a, b]$. Jedem Punkt x_k entspricht dann ein Punkt $P_k = (x_k, f(x_k))$ von C_f .

Für den durch die Punkte P_0, P_1, \dots, P_n definierten Polygonzug ist eine Länge definiert, nämlich

$$L_P(C_f) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

Der Polygonzug stellt eine Approximation von C_f dar und seine Länge eine Approximation für die Länge der Kurve, - falls diese überhaupt existiert!

Bemerkung. Ist P' eine Verfeinerung von P , dann gilt $L_{P'}(C_f) \geq L_P(C_f)$. (Beweis trivial)

Bei einer Verfeinerung der Partition wird also die Länge des zugehörigen Polygonzuges größer. Somit besteht die Möglichkeit, dass die Menge der Längen der Polygonzüge unbeschränkt ist.

Definition.

- (i) Die Kurve C_f heißt **rektifizierbar**, wenn $\sup_P L_P(C_f) < \infty$,
- (ii) Ist C_f rektifizierbar, dann heißt $L(C_f) = \sup_P L_P(C_f)$ die **Bogenlänge** von C_f .

Rektifizierbare Kurven sind also jene Kurven, denen eine Länge zugeord-

net werden kann. Die obige Definition liefert kein wirklich handliches Kriterium zur tatsächlichen Bestimmung der Bogenlänge. Im folgenden betrachten wir daher den Spezialfall von Kurven C_f im \mathbb{R}^2 mit stetig differenzierbarer Funktion f .

Zwischenbemerkung. (Riemannsche Summen)

Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ eine Partition von $[a, b]$.

Für Zwischenpunkte $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ heißt

$$\sum_{k=1}^n \varphi(\xi_k) \Delta x_k \quad \text{eine \textbf{Riemannsche Summe} bzgl. der Partition } P$$

Es gilt: Ist $\varphi(x)$ integrierbar, dann streben die Riemannschen Summen (bei Verfeinerung der Partitionen) gegen

$$\int_a^b \varphi(x) dx .$$

Satz. Falls f stetig differenzierbar auf $[a, b]$ ist, dann ist C_f rektifizierbar und es gilt

$$L(C_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx .$$

Beweis. Sei $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine Partition von $[a, b]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} L_P(C_f) &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2} \Delta x_k . \end{aligned}$$

Mit dem 1. MWS der Differentialrechnung existieren dann weiters geeignete $x_{k-1} < \xi_k < x_k$ mit

$$L_P(C_f) = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + (f'(\xi_k))^2} \Delta x_k .$$

Die rechte Seite stellt eine Riemannsche-Summe der stetigen (und damit

integrierbaren) Funktion $\varphi(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ zur Partition P dar, wobei $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ die Menge der Zwischenpunkte bezeichnet.

Daraus folgt weiters, dass

$$L(C_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx . \quad \square$$

Beispiele.

1) $f(x) = \cosh x$, $a \leq x \leq b$, C_f ... Kettenlinie

$$L(C_f) = \int_a^b \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \int_a^b \cosh x dx = \sinh x \Big|_a^b = \sinh b - \sinh a .$$

2) $f(x) = \ln x$, $1 \leq x \leq A$.

$$L(C_f) = \int_1^A \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx . \quad \text{Substitution } x = \frac{1}{\sinh \xi} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx &= \int \sqrt{1 + \sinh^2 \xi} \left(-\frac{\cosh \xi}{\sinh^2 \xi}\right) d\xi = - \int \frac{\cosh^2 \xi}{\sinh^2 \xi} d\xi = \\ &= - \int \frac{1 + \sinh^2 \xi}{\sinh^2 \xi} d\xi = - \int \frac{1}{\sinh^2 \xi} d\xi - \int d\xi = \coth \xi - \xi = \frac{\cosh \xi}{\sinh \xi} - \xi = \\ &= \frac{\sqrt{1 + \sinh^2 \xi}}{\sinh \xi} - \xi = \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} - \operatorname{arsinh} \frac{1}{x} = \sqrt{1 + x^2} - \operatorname{arsinh} \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Also ist $L(C_f) = \sqrt{1 + A^2} - \operatorname{arsinh} \frac{1}{A} - \sqrt{2} + \operatorname{arsinh} 1$.

3) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$... oberer Halbkreisbogen des Einheitskreises

Betrachte die Punkte $P_0(0, 1)$ und $P_x(x, \sqrt{1 - x^2})$, wobei $0 < x < 1$.

Für die Länge des Bogens $\widehat{P_0 P_x}$ gilt dann

$$L(\widehat{P_0 P_x}) = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{1 - \xi^2}} d\xi = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} .$$

Für $x \rightarrow 1$ wird der Integrand unbeschränkt, daher liegt kein Riemann-Integral im bislang definierten Sinne vor. Es liegt nahe, den Begriff des Riemann-Integrals so zu erweitern, dass auch derartige Fälle behandelt

werden können (\rightarrow "uneigentliche Integrale").

Bogenlänge ebener Kurven in Polarkoordinaten.

Wir betrachten Abbildungen $r : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ und deuten $\varphi \in [\alpha, \beta]$ als Winkel zwischen einem Strahl durch den Ursprung und der x -Achse und r als Entfernung eines gegebenen Punktes P der Ebene zum Ursprung (vgl. Polardarstellung komplexer Zahlen).

$C_r = \{(\varphi, r) : r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha, \beta]\}$ ist dann i.a. eine Kurve im \mathbb{R}^2 .

Wir betrachten eine Partition $P = \{\varphi_0, \dots, \varphi_n\}$ von $[\alpha, \beta]$, verbinden die Punkte $P_k(\varphi_k, r(\varphi_k))$ durch Strecken und erhalten einen Polygonzug.

Nach dem Cosinus-Satz ist die Länge des Polygonzuges

$$\begin{aligned} L_P(C_r) &= \sum_{k=1}^n \sqrt{r^2(\varphi_k) + r^2(\varphi_{k-1}) - 2r(\varphi_k)r(\varphi_{k-1})\cos(\Delta\varphi_k)} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(r(\varphi_k) - r(\varphi_{k-1}))^2 + 2r(\varphi_k)r(\varphi_{k-1})(1 - \cos(\Delta\varphi_k))} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{r(\varphi_k) - r(\varphi_{k-1})}{\Delta\varphi_k}\right)^2 + 2r(\varphi_k)r(\varphi_{k-1})\frac{1 - \cos(\Delta\varphi_k)}{(\Delta\varphi_k)^2}} \Delta\varphi_k \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck strebt für $|P| \rightarrow 0$ gegen

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r'(\varphi))^2 + r^2(\varphi)} d\varphi \quad , \quad \text{weil} \quad \frac{1 - \cos(\Delta\varphi_k)}{(\Delta\varphi_k)^2} \rightarrow \frac{1}{2} . \quad \text{Somit ist}$$

$$L(C_r) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + (r'(\varphi))^2} d\varphi .$$

Beispiel. $r(\varphi) = 1 + \cos \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, C_r ... Kardiode

$$L(C_r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \frac{\varphi}{2} \right| d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi - 2 \int_{\pi}^{2\pi} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \\
&= 4 \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_0^{\pi} - 4 \sin \frac{\varphi}{2} \Big|_{\pi}^{2\pi} = 8 .
\end{aligned}$$

Bogenlänge ebener Kurven in Parameterdarstellung.

Wir betrachten eine Abbildung $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\alpha(t) = (x(t), y(t))$.

Dann ist $C = \{(x(t), y(t)) : a \leq t \leq b\}$ eine Kurve im \mathbb{R}^2 .

Wir betrachten eine Partition $P = \{a = t_0, \dots, t_n = b\}$ von $[a, b]$, verbinden die Punkte $P_k(x(t_k), y(t_k))$ durch Strecken und erhalten einen Polygonzug, dessen Länge durch

$$\begin{aligned}
L_P(C) &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(t_k) - x(t_{k-1}))^2 + (y(t_k) - y(t_{k-1}))^2} = \\
&= \sum_{k=1}^n \sqrt{\left(\frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{\Delta t_k}\right)^2 + \left(\frac{y(t_k) - y(t_{k-1})}{\Delta t_k}\right)^2} \Delta t_k
\end{aligned}$$

gegeben ist. Dieser Ausdruck strebt gegen $\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt$ und somit ist

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt .$$

Beispiel. $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ und $0 \leq t \leq 2\pi$.

$$\dot{x} = -\sin t, \quad \dot{y} = \cos t, \quad \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 1$$

$$\text{Also ist } L(C) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi .$$

Bemerkung. (Kurven im \mathbb{R}^n)

Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ eine Kurve im \mathbb{R}^n .

Dann ist die Bogenlänge dieser Kurve gegeben durch

$$L(C) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dots + \dot{x}_n^2(t)} dt ,$$

d.h. die Bogenlänge ist das Integral über die Länge des Tangentenvektors.