Koordinatentransformation im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Bei der Diskussion der komplexen Zahlen sahen wir, dass ein Punkt der Ebene (verschieden vom Ursprung) sowohl durch seine kartesischen Koordinaten (x, y) als auch durch die sogenannte Polardarstellung (r, φ) beschrieben werden kann.

Liegt allgemeiner ein Zusammenhang $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ vor, dann wird dieser durch eine Abbildung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vermittelt, wo ein Bereich der uv-Ebene in einen Bereich der xy-Ebene abgebildet wird. Man spricht dabei auch von einer **Koordinatentransformation** (der Ebene).

Ist die Abbildung g in einem Punkt lokal umkehrbar, dann heißt dieser Punkt **regulär**, andernfalls **singulär**.

Triviales Beispiel. $x = u + v$, $y = u - v$

Hier haben wir also $g((u, v)) = (u + v, u - v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Diese Abbildung ist offenbar global umkehrbar, weil $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$.

Also ist $g^{-1}((x, y)) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$.

Jeder Punkt ist ein regulärer Punkt.

Bemerkung. Die Frage nach der lokalen Umkehrbarkeit läßt sich zumeist mittels des Satzes über die Umkehrfunktion beantworten : die Jacobi-Determinante ist im untersuchten Punkt $\neq 0$.

Beispiel. (Ebene Polarkoordinaten)

Betrachte $x = x(r, \varphi) = r \cos \varphi$, $y = y(r, \varphi) = r \sin \varphi$, wobei $r \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Jeder Punkt der xy-Ebene wird durch einen Punkt des Bereiches für r und φ repräsentiert.

Für die Jacobi-Determinante gilt $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$.

Damit ist $r = 0$ ein singulärer Punkt (besitzt keinen eindeutig definierten Winkel). Alle anderen Punkte des $r\varphi$-Bereiches sind regulär.

Die Umkehrfunktion läßt sich im Falle $x \neq 0$ mittels

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ beschreiben.

Aufgabe. Man zeige, dass durch $x(u, v) = u + v$, $y(u, v) = \frac{v}{u}$ der erste Quadrant der xy-Ebene in den ersten Quadranten der uv-Ebene abgebildet wird. Man bestimme auch die Umkehrfunktion.

Wichtige Koordinatentransformationen im $\mathbb{R}^3$:

Zylinderkoordinaten

$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, z , wobei $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$.

Für die Jacobi-Determinante gilt

$$\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r \ .$$

Somit besteht die z-Achse aus singulären Punkten.

Die Umkehrung ist durch $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$, $z = z$ gegeben.

Kugelkoordinaten

$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$ wobei

$r \geq 0$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Beachte, dass $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Der Winkel ϑ wird von der positiven z-Achse weg gemessen.

Für die Jacobi-Determinante erhalten wir

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} = \cdots = r^2\sin\vartheta$$

$r = 0$ (der Ursprung) ist ein singulärer Punkt, $\sin\vartheta = 0$ wenn $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$. Damit sind alle Punkte der z-Achse singuläre Punkte (sie besitzen keinen eindeutig bestimmten Winkel φ).

Als **Koordinatenlinien** erhalten wir

r , φ konstant , ϑ beliebig : Meridiane (Längenkreise)

r , ϑ konstant , φ beliebig : Breitenkreise

ϑ , φ konstant , r beliebig : Strahlen

Als **Koordinatenflächen** erhalten wir

r konstant , ϑ , φ beliebig : Kugelflächen

φ konstant , r , ϑ beliebig : Halbebenen durch z-Achse

ϑ konstant , r , φ beliebig : Kegel