Übungsblatt 02 - Differenzial- und Integralrechnung - WS 2013/14

(Heil, Riegelnegg, Ebner, Hörl, Schütky)

1. Bestimmen Sie den Koeffizienten von x^5 in $(1+x)^{11}$ und den Koeffizienten von x^3 in $(3+4x)^6$.

2. Gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Zeigen Sie, dass $a_n + b_n \to a + b$.

3. Bestimmen Sie eine Schranke M und eine Zahl N sodass $a_n \leq M$ gilt für $n \geq N$, wobei $a_n = \frac{n^2+7n+1}{2n^2+5n-3}$.

4. Sei $a > 0$ eine feste reelle Zahl. Zeigen Sie zuerst für $a > 1$ mittels des Einschliessungskriteriums und der Tatsache $\sqrt[n]{n} \to 1$, dass auch $\sqrt[n]{a} \to 1$ gilt. Zeigen Sie anschliessend, dass $\sqrt[n]{a} \to 1$ auch für $0 < a < 1$ gilt.

   Verwenden Sie auch die Formel $a^x = e^{x \ln a}$ für einen alternativen Beweis.

5. Sei $a > 0$ eine feste reelle Zahl. Zeigen Sie mit der Bernoulli Ungleichung dass $a^n \to \infty$ für $a > 1$ gilt. Zeigen Sie anschliessend, dass $a^n \to 0$ gilt für $a < 1$.

6. Bestimmen Sie den Grenzwert von $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$ mit dem Einschliessungskriterium.

7. Bestimmen Sie den Grenzwert von $a_n = (\frac{n^2-1}{n^2})^{n^2}$. Verwenden Sie dabei die Formel $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$.

8. Gegeben sei die Folge $a_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$. Zeigen Sie, dass die Folge monoton steigt und beschränkt ist. Bestimmen Sie den Grenzwert von a_n .