Übungsblatt 04 - Differenzial- und Integralrechnung - WS 2013/14

(Heil, Riegelnegg, Ebner, Hörl, Schütky)

1. Es sei bekannt dass $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Bilden Sie nun das Cauchy-Produkt der Reihen $(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}) \cdot (\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!})$ bis zur Potenz x^4 und verfizieren Sie, dass als Ergebnis e^{2x} herauskommt.

2. Untersuchen Sie die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin^2 \left[\pi(n + \frac{4}{n})\right]$ auf Konvergenz. Verwenden Sie dabei das Additionstheorem $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ sowie die Tatsache, dass $\sin x \leq x$ für $x \geq 0$ ist zur Bestimmung einer konvergenten Majorante.

3. Zeigen Sie mit dem Grenzwertkriterium, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+2k}}{(3k+1)^2}$ konvergiert.

Zeigen Sie ausserdem, dass mit dem Quotientenkriterium keine Aussage möglich ist.

4. Überprüfen Sie folgende Reihen auf Konvergenz

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$

5. Man untersuche, ob die Funktion $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 + e^{x-1} & \text{wenn } x > 1 \\ \sqrt{2-x} + 3x^2 & \text{wenn } x \leq 1 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 1$ stetig ist. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ stetig?

6. Man betrachte die Funktion $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$. Zeigen Sie, dass es für jeden Wert $y \in [-1, +1]$ eine Folge (x_n) gibt mit $x_n \to 0$ und $f(x_n) \to y$. Kann $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig ergänzt werden? Skizzieren Sie die Funktion.

7. Man betrachte $f(x) = \frac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+5}}$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich von $f(x)$ und prüfen Sie, ob an den Stellen $\xi = -2$ bzw. $\xi = +2$ eine stetige Ergänzung möglich ist.

8. Nach einem Satz in der Vorlesung ist die Funktion $f(x) = x^2$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass $f(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ jedoch **nicht** gleichmäßig stetig ist, i.e. führen Sie die Annahme, $f(x)$ wäre auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, zu einem Widerspruch.