

Übungsblatt 06 - Differenzial- und Integralrechnung - WS 2013/14 (Heil, Riegelnegg, Ebner, Hörl, Schütky)

1. Man bestimme den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3^n}{n^2} (x-1)^n$ und gebe das (offene) Konvergenzintervall an.

(Hinweis: Man überlege, dass $\frac{n}{3^n} \rightarrow 0$, z.B. mit der Regel von de l'Hospital)

2. Berechnen Sie die Ableitungen von

(a) $y = x^x$ (b) $y = \arcsin(2x - 3)$ (c) $y = \frac{1}{ab} \arctan\left(\frac{b}{a} \tan x\right)$

3. Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = |1 - e^x|$ differenzierbar?

4. Beweisen Sie die Ungleichung $\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x$ für $x > 0$ unter Verwendung des 1. Mittelwertsatzes für die Funktion $f(t) = \arctan t$.

5. Ermitteln Sie ein $\xi \in (0, 1)$ in Abhängigkeit von x so, dass für die Funktion $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1+x}{2}$ gilt: $\frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(\xi)$.

6. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion, dass

(a) $(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ und (b) $(\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x+2}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sinh x} - \frac{1}{x} \right)$, (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 2^x)^{\sin x}$