Übungsblatt 08 - Differenzial- und Integralrechnung - WS 2013/14

(Heil, Riegelnegg, Ebner, Hörl, Schütky)

1. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$. Für welche $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist f stetig? Was ist der Richtungsgrenzwert von f entlang der y-Achse bei Annäherung an $(0,0)$? Was ist der Richtungsgrenzwert von f entlang der Geraden $y = kx$ bei Annäherung an $(0,0)$? Zeigen Sie, dass dabei jeder Wert aus $[-1,1]$ auftreten kann.

2. Untersuchen Sie die Funktion $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2+y^3}{x^2+y^2} & \text{wenn } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{wenn } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ auf Differenzierbarkeit an der Stelle $(0,0)$.

Verwenden Sie dabei $f(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \sqrt{x^2+y^2} f_0(x,y)$ und zeigen Sie, dass $f_0(x,y)$ **nicht** gegen Null strebt, wenn $(x,y) \to (0,0)$. Betrachten Sie dazu Annäherungen entlang der y-Achse und entlang der Geraden $y = -x$.

3. Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(x,y) = \cos(xy) - \sin(x+y)$ im Ursprung in Richtung $\frac{\pi}{4}$.

4. Bestimmen Sie die Richtungsableitung von $f(x,y,z) = x^3yz^2 + e^{2x}$ in Richtung des Vektors $\vec{a}' = (1,1,1)^T$ im Punkt $(0,3,2)$. Bestimmen Sie außerdem die Richtung der maximalen Änderungsrate von f .

5. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. Ordnung von $f(x,y,z) = z\ln(1 + \frac{x^2}{1+y^2})$.

6. Sei $f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$. Man bestimme alle partiellen Ableitungen bis zur 2. Ordnung.

7. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix der Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, wobei

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ 1 + x + y \\ xy \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix} .$$

8. Sei $z = \frac{y}{f(x^2-y^2)}$ und f differenzierbar. Mit Hilfe der Substitution $u(x,y) = x^2 - y^2$ und Verwendung der Quotienten- und Kettenregel zeige man $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.