Unendliche Reihen

Wegen der elementaren Eigenschaften der Zahlen ist klar, was unter einer **endlichen** Summe von Zahlen $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ zu verstehen ist. Vorderhand ist noch nicht erklärt, was unter einer "unendlichen Summe" von Zahlen zu verstehen ist.

Frage. Welcher 'Summenwert' ergibt sich bei $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$?

Da der Begriff der Folge bereits zur Verfügung steht, kann nun auch dem Begriff der "unendlichen Summe" bzw. einer unendlichen Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ eine exakte Bedeutung gegeben werden.

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge (die Folge der Summanden). Wir bilden eine zugehörige Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

s_n heißt ***n*-te Partialsumme** .

Definition. Konvergiert die Folge (s_n) der Partialsummen, $s_n \to s$, dann sagt man, dass die unendliche Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert, und schreibt

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ .$$

D.h. Die Summe einer unendlichen Reihe ist der Grenzwert der Folge der Partialsummen.

Bemerkung. Reihen der Form $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ können durch Umindizierung auf die "Standardform" gebracht werden, und damit hat die Schreibweise $\sum\limits_{k=m}^{\infty} a_k$ ebenfalls eine klare Bedeutung.

Definition. Eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **divergent** , wenn sie nicht konvergiert.

Beispiel 1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots$ (**Geometrische Reihe**)

$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ und $qs_n = q + q^2 + \dots + q^{n+1}$. Für $q = 1$ ist $s_n = n + 1$ und damit ist (s_n) divergent. Für $q \neq 1$ ist $s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Aus den Eigenschaften der geometrischen Folge folgt, dass für $|q| < 1$ die Reihe konvergiert und es gilt $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Für $|q| \geq 1$ divergiert die Reihe.

Beispiel 2. $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots$ (**Teleskop-Reihe**)

Wegen $\frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ ist $s_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) =$
$= 1 - \frac{1}{n} \to 1$. Also ist die Reihe konvergent.

Beispiel 3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ (**Harmonische Reihe**)

Zu $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir $\sigma_k = \sum\limits_{m=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{m}$. Hier gibt es $2^k - 2^{k-1}$ Summanden und $\frac{1}{2^k}$ ist der kleinste Summand. Folglich ist
$\sigma_k \geq (2^k - 2^{k-1})\frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
Ist nun $n = 2^k$, dann ist $s_n = 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k \geq 1 + \frac{k}{2}$.

Damit ist (s_n) **keine** beschränkte Folge, kann also nicht konvergent sein, und folglich ist die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ **divergent** .

Beispiel 4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$

Setze $c_1 = 1$ und $c_k = \frac{1}{(k-1)k}$ für $k \geq 2$. Dann gilt $\frac{1}{k^2} \leq c_k \ \forall\, k$ und weil $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent ist (siehe Beispiel 2.), folgt mit dem Vergleichskriterium (siehe später), dass $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ **konvergent** ist.

Aus bereits erwähnten Aussagen über Folgen ergibt sich sofort

Satz. Seien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ ebenfalls konvergent und es gilt

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Beispiel. (Wir setzen als bekannt voraus, dass $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$)

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^k - 5}{4^k k!} = 3 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\frac{1}{2})^k - 5 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\frac{1}{4})^k = 3e^{1/2} - 5e^{1/4}$.

Für eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt $s_{m,n} = \sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k$ mit $n > m \geq 0$ ein **Teilstück** der Reihe.

$r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ heißt ein **Endstück** der Reihe bzw. ein **Reihenrest**.

Weil $s_{m,n} = s_n - s_m$, ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann konvergent wenn

$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N_\varepsilon$ sodass $|s_{m,n}| = |\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k| < \varepsilon$ für $n > m > N_\varepsilon$.

Ist speziell $n = m + 1$, dann ist $|s_{m,m+1}| = |a_{m+1}|$. Dies liefert ein **notwendiges Kriterium** für die Konvergenz einer Reihe :

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow$ (a_k) ist eine Nullfolge.

Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = s$ konvergent. Wegen $s - s_m = r_m$, muß die Folge der Reihenreste (r_m) eine Nullfolge sein, d.h. der "Reihenrest kann beliebig klein gemacht werden".

Offenbar ändert sich das Konvergenzverhalten einer Reihe nicht, wenn **endlich viele** Summanden weggelassen, hinzugefügt oder abgeändert werden.

Definitiion. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt **bedingt konvergent**, wenn die Reihe konvergiert, aber nicht absolut konvergent ist.

Bemerkungen. (i) Hat eine reelle Reihe nur positive Summanden, dann sind Konvergenz und absolute Konvergenz gleichbedeutend.

(ii) Wegen $|s_{m,n}| = |\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k| \leq \sum\limits_{k=m+1}^{n} |a_k|$ folgt aus der absoluten Konvergenz auch die Konvergenz der Reihe.

Beispiel. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$ ist konvergent (siehe später) aber nicht absolut konvergent.

Satz. (**Vergleichskriterium**) Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ gegeben.

1) Gilt $|a_k| \leq c_k$ für fast alle k und ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent, dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. ($\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$ heißt dann eine konvergente **Majorante** von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$)

2) Gilt $a_k \geq d_k \geq 0$ für fast alle k und ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ divergent, dann

ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent. ($\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$ heißt dann eine divergente **Minorante** von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$)

Beweis. 1) folgt aus $\sum\limits_{k=m+1}^{n} |a_k| \leq \sum\limits_{k=m+1}^{n} c_k$.

zu 2) : Wäre $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent, dann wegen 1) auch $\sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k$, ein Widerspruch. $\square$

Beispiele.

1) Betrachte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{5}{k2^k}$. Wegen $|a_k| = \frac{5}{k2^k} \leq 5 \cdot \frac{1}{2^k}$ ist die geometrische Reihe $5 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ eine konvergente Majorante, also ist die gegebene Reihe absolut konvergent.

2) Betrachte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{k}}{k}$. Wegen $a_k = \frac{1+\sqrt{k}}{k} > \frac{1}{k}$, ist die harmonische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ eine divergente Minorante, also ist die gegebene Reihe divergent.

3) Betrachte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$. Wegen $|a_k| = \frac{k!}{k^k} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}{k \cdot k \cdot k \cdots k} = \frac{2}{k^2} \cdot \frac{3}{k} \cdot \frac{4}{k} \cdots \frac{k}{k} < \frac{2}{k^2}$ ist $2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ eine konvergente Majorante der gegebenen Reihe, welche somit konvergiert.

Bemerkung. Bei zahlreichen reellen Reihen sind die einzelnen Reihenglieder ≥ 0 . In diesem Fall ist die Folge der Partialsummen monoton steigend.

Somit konvergiert eine derartige Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn die Folge (s_n) der Partialsummen (nach oben) beschränkt ist.

Ohne Beweis sei ein weiteres Ergebnis angeführt.

Satz. (**Verdichtungssatz** von Cauchy)

Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ gegeben, wobei $a_k \geq 0 \;\; \forall\, k$ und die Folge (a_k) monoton fallend ist.

Dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent genau dann, wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.

Beispiel. Betrachte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Für $\alpha \leq 0$ bilden die Reihenglieder keine Nullfolge, daher ist in diesem Fall die Reihe divergent.

Für $\alpha > 0$ bilden die Reihenglieder eine monoton fallende Nullfolge, sodass der Verdichtungssatz anwendbar ist, d.h. wir betrachten die Reihe

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k$.

Dies ist aber eine geometrische Reihe, die nur für $2^{1-\alpha} < 1$ konvergiert.

Also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ nur für $\alpha > 1$. Im besonderen konvergiert damit etwa die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$. $\square$

Ein weiteres wichtiges Kriterium sei ebenfalls ohne Beweis angeführt.

Satz. (**Grenzwertkriterium**)

Seien (a_k) und (b_k) Folgen positiver reeller Zahlen. Gilt $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l$ mit $0 < l < \infty$, dann sind die beiden Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ entweder beide konvergent oder beide divergent.

Beispiel. Betrachte $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \frac{k^2-2k+5}{k^4-3k^2+2k}$. Wähle $b_k = \frac{1}{k^2}$.

Dann gilt $\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^4-2k^3+5k^2}{k^4-3k^2+2k} = \frac{1-\frac{2}{k}+\frac{5}{k^2}}{1-\frac{3}{k^2}+\frac{2}{k^3}} \to 1$ und somit ist $\sum\limits_{k=2}^{\infty} a_k$ konvergent.

Im folgenden werden zwei wichtige Kriterien für die absolute Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ diskutiert, nämlich das Wurzelkriterium und das Quotientenkriterium.

Satz. (**Wurzelkriterium**)

1) $\exists\, q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$ und $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ für fast alle k $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

2) Gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ für unendlich viele k, dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

3) Gilt weder 1) noch 2), dann ist (vorderhand) keine Aussage möglich.

Beweis.

zu 1) : Es gilt $|a_k| \leq q^k$ für fast alle k, und damit ist die geometrische Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ wegen $q < 1$ eine konvergente Majorante.

zu 2) : Gilt $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ für unendlich viele k, dann kann (a_k) keine Nullfolge sein, also ist die Reihe divergent.

zu 3) : Die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ erfüllen weder 1) noch 2), jedoch ist die erste Reihe konvergent und die zweite Reihe divergent. $\square$

Satz. (**Quotientenkriterium**)

1) $\exists\, q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq q < 1$ und $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \leq q$ für fast alle k $\Rightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ ist absolut konvergent.

2) Gilt $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \geq 1$ für fast alle k, dann ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent.

3) Gilt weder 1) noch 2), dann ist (vorderhand) keine Aussage möglich.

Beweis.

zu 1) : Es gelte $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \le q < 1$ für $k > N$. Dann ist für $k > N$

$|a_k| = |\frac{a_k}{a_{k-1}}||\frac{a_{k-1}}{a_{k-2}}| \dots |\frac{a_{N+1}}{a_N}||a_N| \le q^{k-N}|a_N| = |\frac{a_N}{q^N}|q^k = cq^k$.

Wiederum ist die geometrische Reihe $c\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k$ eine konvergente Majorante.

zu 2) : Gilt $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \ge 1$ für fast alle k , dann kann (a_k) keine Nullfolge sein, also ist die Reihe divergent.

zu 3) : Die Reihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ erfüllen weder 1) noch 2), jedoch ist die erste Reihe konvergent und die zweite Reihe divergent. $\square$

Wichtige Bemerkung. Ist die Folge $(\sqrt[k]{|a_k|})$ (bzw. $(|\frac{a_{k+1}}{a_k}|)$) im besonderen konvergent (was ja nicht immer der Fall sein muß), also etwa $\sqrt[k]{|a_k|} \to q$ (bzw. $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \to q$), dann liegt für $q < 1$ absolute Konvergenz vor, für $q > 1$ Divergenz, und für $q = 1$ ist keine Aussage möglich.

Beispiele.

(a) Betrachte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-k}$. Dann ist $|a_k| = \frac{k^4}{e^k}$ und

$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{e}(\sqrt[k]{k})^4 \to \frac{1}{e} < 1$. Also ist die Reihe absolut konvergent.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}x^k$ konvergent?

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = \frac{[(k+1)!]^2(2k)!|x|^{k+1}}{(2k+2)!(k!)^2|x|^k} = \frac{(k+1)^2|x|}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{(1+\frac{1}{k})^2|x|}{(2+\frac{1}{k})(2+\frac{2}{k})} \to \frac{|x|}{4} \quad \text{für} \quad k \to \infty \ .$$

Somit ist die Reihe absolut konvergent für $\frac{|x|}{4} < 1$, i.e. für $|x| < 4$, und divergent für $|x| > 4$.

Für die Randpunkte $x = \pm 4$ ist eine gesonderte Untersuchung erforderlich.

Definition. Die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ heißt **alternierend**, wenn zwei aufeinanderfolgende Summanden verschiedenes Vorzeichen haben. Somit kann eine derartige Reihe in der Form $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ mit $a_k \geq 0$ geschrieben werden.

Für alternierende Reihen gilt folgendes wichtige hinreichende Kriterium

Satz. (**Leibniz-Kriterium**)

Sei die alternierende Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ gegeben.

1) Ist (a_k) eine monotone Nullfolge, dann konvergiert die Reihe.

2) Ist $s = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$, dann gilt für die Teilsumme s_n die Abschätzung $|s_n - s| \leq a_{n+1}$.

Beispiel. Betrachte $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^\alpha}$. Für $\alpha > 0$ bildet die Folge $(\frac{1}{k^\alpha})$ eine monoton fallende Nullfolge, und damit ist die Reihe nach dem Leibniz-Kriterium konvergent.

Im speziellen ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ konvergent.

Weitere Bemerkungen.

1) Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ gegeben, und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine bijektive Abbildung.

Wir setzen $b_k = a_{\varphi(k)} \;\; \forall\, k$. Dann heißt $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ eine **Umordnung** von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Es gilt (ohne Beweis) :

(i) Ist $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent zur Summe s , dann konvergiert auch jede Umordnung von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut und hat die gleiche Summe s .

(ii) (Umordnungssatz von Riemann) Sei $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ bedingt konvergent und $t \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Umordnung $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ von $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ mit der Summe t .

2) Seien die Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ mit Summen s bzw. t gegeben.

Wir wollen die beiden Reihen in geeigneter Weise "multiplizieren" und als Ergebnis wieder eine Reihe erhalten. Dafür gibt es grundsätzlich mehrere Möglichkeiten.

Wir setzen $c_k = \sum\limits_{i=0}^{k} a_{k-i} b_i = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + \ldots + a_0 b_k$ für alle $k \geq 0$.

Also $c_0 = a_0 b_0$, $c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1$, $c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2$ etc.

Die dadurch erhaltene Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$ heißt das **Cauchy-Produkt** der Reihen $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$.

(Das Cauchy-Produkt tritt in natürlicher Weise bei der Produktbildung zweier Potenzreihen auf.)

Es gilt : Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent zur Summe s und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent zur Summe t , dann konvergiert das Cauchy-Produkt der beiden Reihen zur Summe st .

Bemerkung. Auf analoge Weise kann die Konvergenz von komplexen Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k$$

erklärt werden.

Ist $z_k = x_k + iy_k$ dann ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ offenbar genau dann konvergent wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} x_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} y_k$ konvergieren, und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k = \sum_{k=0}^{\infty} x_k + i \sum_{k=0}^{\infty} y_k \ .$$

Des weiteren können etwa das Wurzelkriterium und das Quotientenkriterium verwendet werden, um über die absolute Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} z_k$ Auskunft zu erhalten (weil die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |z_k|$ eine reelle Reihe mit positiven Reihengliedern ist).