Ableitung und Mittelwertsätze

Wir kommen nun zu einem der zentralen Begriffe der Analysis, nämlich zum Begriff der Ableitung einer Funktion.

Definition. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$.

1) f heißt **differenzierbar an** $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.

(Ist dabei x_0 linker bzw. rechter Randpunkt von I , dann heißt f an x_0 **rechtsseitig** bzw. **linkseitig differenzierbar** .)

2) Die so punktweise definierte Funktion f' heißt **Ableitung** von f . (Sie ist an jenen Stellen definiert, wo f differenzierbar ist.)

Existiert f' auf einer Menge X_0 und ist f' dort stetig, dann heißt f **stetig differenzierbar auf** X_0 .

3) Die **höheren Ableitungen** lassen sich rekursiv definieren :

$f'' = (f')'$, ..., $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$

4) Den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ bezeichnet man auch als **Differentialquotient** und man schreibt $\frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0)$.

Elementare Beispiele.

1) Die **konstante Funktion** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$ ist für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$.

2) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^n \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar.

Dabei gilt : $f'(x) = nx^{n-1} \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Für ein festes x ist $\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n - x^n}{h} =$

$= nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \binom{n}{3}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^{n-1} \to nx^{n-1}$ für $h \to 0$. $\square$

3) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x| \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und an $x_0 = 0$ **nicht** differenzierbar.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x-0}{x-0} = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-x-0}{x-0} = -1$.

An jeder Stelle $x_0 \neq 0$ ist f allerdings differenzierbar.

$f'(x_0) = 1$ falls $x_0 > 0$ und $f'(x_0) = -1$ falls $x_0 < 0$.

Satz. $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar an $x_0 \;\Rightarrow\; f$ stetig in x_0 .

Beweis. Sei (x_n) eine Folge aus I mit $x_n \neq x_0$ und $x_n \to x_0$.

Dann gilt $f(x_n) - f(x_0) = \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n - x_0}(x_n - x_0) \to f'(x_0) \cdot 0 = 0$. $\square$

Bemerkung. Es gibt allerdings stetige Funktionen, die an keinem Punkt ihres Definitionsbereiches differenzierbar sind.

Das eigentliche "Wesen" der Differenzierbarkeit einer Funktion besteht darin, dass die Funktion in einer bestimmten Weise "**linear approximierbar**" ist. Dies zeigt sich später in besonderer Weise bei Funktionen mehrerer Veränderlicher.

Ist f an x_0 differenzierbar, dann betrachten wir die durch $c = f'(x_0)$ definierte Gerade $g(x) = f(x_0) + c(x - x_0)$ durch x_0 .

Dann gilt offenbar

$$\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)-c(x-x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \to 0 \quad \text{für } x \to x_0 \;.$$

Ist umgekehrt $c \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x_0) + c(x - x_0)$ und gilt $\frac{f(x)-g(x)}{x-x_0} \to 0$ für $x \to x_0$, dann ist f differenzierbar an x_0 und es gilt $f'(x_0) = c$.

Wir können auch schreiben

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h)$$

Dabei beschreibt $f(x+h) - f(x)$ die Änderung der Funktion und $o(h)$ ist der Restterm, welcher die Eigenschaft $\lim\limits_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$ besitzt.

Der lineare Anteil an der Änderung der Funktion wird als **totales Differenzial** df bezeichnet.

Mit $h = dx$ erhalten wir so die Schreibweise $df = f'(x)dx$.

Beispiel. Wir betrachten das Volumen einer Kugel $V(r) = \frac{4}{3}r^3\pi$.

Ändern wir den Radius zu $r+dr$ dann ist der lineare Anteil der tatsächlichen Volumensänderung gegeben durch

$$dV = V'(r)dr = 4r^2\pi dr \ .$$

Satz. (**Ableitungsregeln**)

Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ an $x_0 \in I$ differenzierbar. Dann gilt

1) $f \pm g$ sind an x_0 differenzierbar und

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

2) $f \cdot g$ ist an x_0 differenzierbar und

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \quad \text{... } \textbf{Produktregel}$$

3) Falls $g(x_0) \neq 0$, ist $\frac{f}{g}$ an x_0 differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)} \quad \text{... } \textbf{Quotientenregel}$$

Beweis. (für die Produktregel)

Gelte $x_n \to x_0$ mit $x_n \neq x_0$. Dann ist $\frac{f(x_n)g(x_n) - f(x_0)g(x_0)}{x_n - x_0} =$

$$\frac{[f(x_n)g(x_n) - f(x_n)g(x_0)] + [f(x_n)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)]}{x_n - x_0} = f(x_n)\frac{g(x_n) - g(x_0)}{x_n - x_0} + \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}g(x_0)$$

$\to f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)$. $\square$

Folgerungen.

i) Ein Polynom $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist an jedem $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $P'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

Da die Ableitung eines Polynoms wieder ein Polynom ist, ist somit ein Polynom beliebig oft differenzierbar.

ii) Eine rationale Funktion, also der Quotient zweier Polynome, ist auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.

Nun betrachten wir zusammengesetzte Funktionen.

Satz. (**Kettenregel**)
Sei $h = g \circ f$ auf I definiert. Ist f an x_0 differenzierbar und g an $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, dann ist $h = g \circ f$ an x_0 differenzierbar und es gilt

$$h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) \quad \text{bzw.}$$

$$\tfrac{dh}{dx}(x_0) = \tfrac{d(g \circ f)}{dx}(x_0) = \tfrac{dg}{dy}(y_0) \tfrac{df}{dx}(x_0)$$

Beweis. Sei $x_n \to x_0$ mit $x_n \neq x_0$.

Fall 1 : $\exists\, \delta > 0$ mit $f(x) \neq f(x_0)$ für alle $x \in K(x_0, \delta) \cap I$, $x \neq x_0$.

Dann ist $\frac{h(x_n)-h(x_0)}{x_n - x_0} = \frac{g(f(x_n))-g(f(x_0))}{f(x_n)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} = \frac{g(y_n)-g(y_0)}{y_n-y_0} \cdot \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \to$ $g'(y_0) f'(x_0)$.

Fall 2 : Es gibt eine Folge $(\widetilde{x}_n)$ aus I mit $\widetilde{x}_n \to x_0$, $\widetilde{x}_n \neq x_0$ und $f(\widetilde{x}_n) = f(x_0)$. Dann gilt allerdings $f'(x_0) = 0$.

(x_n) zerfällt dann möglicherweise in zwei Teilfolgen (x'_n) und (x''_n) mit $f(x'_n) = f(x_0)$ und $f(x''_n) \neq f(x_0)$.

$\frac{h(x'_n)-h(x_0)}{x'_n-x_0} = \frac{g(f(x'_n))-g(f(x_0))}{x'_n-x_0} = 0 \to 0$

$\frac{h(x''_n)-h(x_0)}{x''_n-x_0} = \frac{g(f(x''_n))-g(f(x_0))}{f(x''_n)-f(x_0)} \cdot \frac{f(x''_n)-f(x_0)}{x''_n-x_0} \to g'(f(x_0))f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot 0 = 0$

Also ist $h'(x_0) = 0$. $\square$

Beispiel. Sei $h(x) = e^{x^2}$. Dann kann h als zusammengesetzte Funktion $h = g \circ f$ geschrieben werden mit $f(x) = x^2$ und $g(y) = e^y$.

Es sei bekannt (siehe später) dass $(e^y)' = e^y$. Dann ist

$h'(x) = g'(y)|_{y=f(x)} f'(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}$.

Satz. (**Ableitung der Umkehrfunktion**)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig auf dem offenen Intervall I , dort streng monoton und an $x_0 \in I$ differenzierbar.

Gilt $f'(x_0) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Beweis. Sei (y_n) eine Folge aus $D(f^{-1})$ mit $y_n \neq y_0$ und $y_n \to y_0$. Dann existiert eine Folge (x_n) mit $f(x_n) = y_n$ und $x_n \neq x_0 \ \forall\ n$.

Wegen der Stetigkeit von f^{-1} (siehe vorher) gilt
$x_n = f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y_0) = x_0$.

Damit $\frac{f^{-1}(y_n)-f^{-1}(y_0)}{y_n-y_0} = \frac{x_n-x_0}{f(x_n)-f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}} \to \frac{1}{f'(x_0)}$. $\square$

Beispiel.

$f(x) = x^2$ ist stetig und streng monoton wachsend auf $(0,\infty)$. Die Umkehrfunktion f^{-1} ist durch $f^{-1}(y) = +\sqrt{y}$ gegeben.

Ist $y_0 = x_0^2$, dann ist $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$.

Wir befassen uns nun mit den Ableitungen der elementaren Funktionen.

1) **Logarithmus**

Sei $x > 0$ fest und $x_n \to x$ mit $x_n > 0$. Setze $h_n = x_n - x$. Dann gilt $h_n \to 0$ und

$$\frac{\log_b(x_n)-\log_b x}{x_n-x} = \frac{\log_b(x+h_n)-\log_b x}{h_n} = \frac{1}{h_n}\log_b(1+\frac{h_n}{x}) = \frac{1}{x}\log_b(1+\frac{h_n}{x})^{\frac{x}{h_n}} \to \frac{1}{x}\log_b e$$

Also $(\log_b x)' = \frac{1}{x}\log_b e \quad (x > 0)$

Im speziellen, für $b = e$, erhalten wir $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Man beachte auch, dass $(\ln|x|)' = \frac{1}{x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2) **Exponentialfunktion**

Für $y = e^x$ ist $x = \ln y$ die Umkehrfunktion. Daher ist wegen vorher

$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$. Also $(e^x)' = e^x$.

Für $y = b^x = e^{x\ln b}$ gilt wegen der Kettenregel

$(b^x)' = (e^{x\ln b})' = \ln b \cdot e^{x\ln b} = b^x \ln b$. Also $(b^x)' = b^x \ln b$, $x \in \mathbb{R}$.

3) **Potenzfunktion**

Wegen $x^a = e^{a\ln x}$ folgt mit der Kettenregel

$(x^a)' = (e^{a\ln x})' = \frac{a}{x}e^{a\ln x} = \frac{a}{x}x^a$ und damit $(x^a)' = ax^{a-1}$, $(x > 0)$.

4) **Hyperbolische Funktionen**

Mit Hilfe der Differentiationsregeln über zusammengesetzte Funktionen erhalten wir

$(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$, $(\tanh x)' = \frac{1}{(\cosh x)^2}$ und

$(\coth x)' = -\frac{1}{(\sinh x)^2}$, $x \neq 0$.

Mit dem Satz über die Ableitung der Umkehrfunktion erhalten wir

$(\mathrm{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $(\mathrm{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $(\mathrm{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$ $(|x| < 1)$,

$(\mathrm{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$ $(|x| > 1)$.

4) **Trigonometrische Funktionen**

Satz. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2})$,

$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(x \neq k\pi)$

Beweis. (für $\sin x$)

Subtraktion der Additionstheoreme $\sin(x_1+x_2) = \sin x_1 \cos x_2 + \cos x_1 \sin x_2$ und $\sin(x_1 - x_2) = \sin x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \sin x_2$ liefert

$\sin(x_1 + x_2) - \sin(x_1 - x_2) = 2 \cos x_1 \sin x_2$.

Mit $x_1 = x + \frac{h}{2}$ und $x_2 = \frac{h}{2}$ ergibt sich

$\sin(x+h) - \sin x = 2\cos(x + \frac{h}{2}) \sin \frac{h}{2}$, also $\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos(x + \frac{h}{2}) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$

Für $h \to 0$ erhalten wir $(\sin x)' = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} =$

$$\lim_{h \to 0} \left(\cos(x + \tfrac{h}{2}) \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) = \lim_{h \to 0} \cos(x + \tfrac{h}{2}) \lim_{h \to 0} \frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x \ .$$

Unter Verwendung des Satzes für die Ableitung der Umkehrabbildung erhalten wir

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$, $(\mathrm{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Die Ableitung $f'(x_0)$ kann offenbar auch als Steigungsmaß des Graphen einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 aufgefaßt werden. Deshalb liegt es nahe, dass in einem Extremalpunkt (Maximum oder Minimum) die Ableitung f' den Wert Null annimmt.

Satz. (**Fermat**)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ an $x_0 \in (a, b)$ differenzierbar. Hat f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum oder Minimum, gilt notwendigerweise $f'(x_0) = 0$.

Beweis. (für ein lokales Maximum)

Betrachte Folgen (x_n) und (x'_n) mit $x_n = x_0 + \frac{1}{n}$ bzw. $x'_n = x_0 - \frac{1}{n}$.

Hat f an x_0 ein lokales Maximum, dann gilt $f(x_0 + \frac{1}{n}) - f(x_0) \leq 0$ und $f(x_0 - \frac{1}{n}) - f(x_0) \leq 0$ und folglich

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)}{\frac{1}{n}} \leq 0 \quad \text{bzw.} \quad f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0-\frac{1}{n})-f(x_0)}{-\frac{1}{n}} \geq 0 \ .$$

Damit ist $f'(x_0) = 0$. $\square$

Bemerkung. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist lediglich eine notwendige Bedingung, damit an der Stelle x_0 überhaupt ein lokales Extremum vorliegen kann. Diese Bedingung ist allerdings nicht hinreichend, wie das Beispiel $f(x) = x^3$, $x_0 = 0$ zeigt. Die Auswertung von $f'(x) = 0$ liefert damit die Kandidaten, die für ein lokales Extremum in Frage kommen.

Satz. (**Satz von Rolle**)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) und es gelte $f(a) = f(b)$.

Dann gibt es (mindestens) eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Der Fall einer konstanten Funktion ist trivial. Sei also f nicht konstant. Weil f stetig und $[a, b]$ kompakt ist, gibt es ein Maximum und ein Minimum, wobei eines der beiden von $f(a)$ (und damit auch von $f(b)$) verschieden sein muß. Sei $\xi \in (a, b)$ diese Stelle.

Nach dem Kriterium von Fermat ist dann $f'(\xi) = 0$. $\square$

Der Satz von Rolle kann nun verallgemeinert werden zum wichtigen

Satz. (**1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung**)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) . Dann gibt es eine Stelle $\xi \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \ .$$

(Dies bedeutet: Der Graph von f hat an der Stelle ξ eine Tangente, die parallel zur Sekante durch $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ ist.)

Beweis.

Betrachte die Hilfsfunktion $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$.

Dann ist $F(x)$ stetig auf $[a, b]$ und auf (a, b) differenzierbar und es gilt $F(a) = F(b) = 0$. Weiters ist $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Nach dem Satz von Rolle $\exists\, \xi \in (a, b)$ mit $F'(\xi) = 0$,

d.h. aber $f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. $\square$

Folgerungen. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b) .

1) $f'(x) = 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ ist konstant.

Beweis. Sei $a < x \leq b$. Dann gibt es ein $\xi \in (a, x)$ mit $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi) = 0$ und folglich $f(x) = f(a)$. $\square$

2) $f'(x) = g'(x) \quad \forall\, x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f(x) = g(x) + \text{const.}$

Beweis. Folgt aus 1) mit $F(x) = f(x) - g(x)$. $\square$

3) i) $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ ist streng monoton wachsend,

ii) $f'(x) < 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ ist streng monoton fallend.

Beweis.

Für i) : Gelte $f'(x) > 0 \quad \forall\, x \in (a,b)$ und sei $a \le x_1 < x_2 \le b$. Anwendung des 1. MWS auf f im Intervall $[x_1, x_2]$ liefert :

$\exists\, \xi \in (x_1, x_2)$ mit $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$. Weil $f'(\xi) > 0$ und $x_2 - x_1 > 0$ ist, gilt $f(x_2) > f(x_1)$. $\square$

Mit Hilfe des 1. MWS lassen sich zahlreiche interessante und wichtige Abschätzungen gewinnen.

Beispiel. $1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}$ für $x \in (0,1)$.

Anwendung des 1. MWS auf $f(t) = e^t$ in $[0,x]$ liefert $\frac{e^x - e^0}{x} = e^\xi$ mit $0 < \xi < x$.

Weil e^ξ monoton wächst, gilt $1 = e^0 < e^\xi < e^x$ und damit

$1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x$ bzw. $1 + x < e^x < \frac{1}{1-x}$, weil $x \in (0,1)$.

Beispiel. $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ für $x > 0$.

Anwendung des 1. MWS auf $f(t) = \ln(1+t)$ in $[0,x]$ liefert

$\frac{\ln(1+x) - \ln 1}{x} = \frac{1}{1+\xi}$ mit $0 < \xi < x$.

Weil $\frac{1}{1+\xi}$ monoton fällt, gilt $1 > \frac{1}{1+\xi} > \frac{1}{1+x}$ und damit

$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$ bzw. $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$, weil $x > 0$.

Ohne Beweis sei folgende Erweiterung des 1. Mittelwertsatzes erwähnt

Satz. (**2. Mittelwertsatz der Differentialrechnung**)

Seien f und g stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b) . Dann $\exists\, \xi \in (a,b)$ sodass

$$[f(b) - f(a)]g'(\xi) = [g(b) - g(a)]f'(\xi) .$$

Ist $g'(x) \ne 0$ auf (a,b) , gilt weiters

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

.