Unbestimmte Ausdrücke

Die Bestimmung von Grenzwerten von Funktionen ist manchmal nicht direkt möglich.

Dies ist etwa dann der Fall wenn z.B. der Grenzwert eines Quotienten $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ an einer Stelle x_0 bestimmt werden soll, und es gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ **und** $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (oder $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ **und** $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$) .

Man nennt diese Ausdrücke "**unbestimmte Ausdrücke**", weil vorderhand keine Aussage möglich ist.

Beispiel. Betrachten wir etwa $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x}$, dann streben sowohl Zähler als auch Nenner gegen Null. Offenbar gilt $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$.

Im Falle von $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x^2}$ streben Zähler und Nenner ebenfalls gegen Null. Nun gilt aber offenbar $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x}{x^2} = +\infty$.

Weiteres Beispiel. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$.

Weitere unbestimmte Ausdrücke, außer den genannten $\left(\frac{0}{0}\right)$ und $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ wären etwa (1^∞) , (0^0) , (∞^0) , $(0 \cdot \infty)$ und $(\infty - \infty)$. Sie lassen sich allerdings auf die beiden Grundfälle zurückführen.

Ohne Beweis sei die folgende wichtige Aussage angeführt.

Satz. (**Regel von de l'Hospital**)

Seien f und g (geeignet) differenzierbar auf einem Intervall und gelte

$\lim\limits_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ mit $\lim\limits_{x \to b} g'(x) \neq 0$. Dann folgt aus

$\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} g(x) = 0$ **oder** $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \lim\limits_{x \to b} g(x) = \infty$

die Aussage

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \ .$$

Bemerkungen.

1) Die Aussage gilt auch, falls $b = +\infty$ (bzw. $b = -\infty$) ist. Wir setzen $x = \frac{1}{t}$ und erhalten

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to0^+} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})(-t^{-2})}{g'(\frac{1}{t})(-t^{-2})} = \lim_{t\to0^+} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

2) Die Aussage gilt auch für den Fall $l = \pm\infty$, weil $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to +\infty \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{f'(x)} \to 0^+$ und $\frac{f'(x)}{g'(x)} \to -\infty \Leftrightarrow \frac{g'(x)}{f'(x)} \to 0^-$.

3) Hat man nach einmaliger Anwendung wiederum einen unbestimmten Ausdruck, kann der Satz wiederum auf die Funktionen f' und g' angewendet werden, sofern die entsprechenden Voraussetzungen vorliegen.

4) $f(x)g(x) = (0 \cdot \infty)$ kann übergeführt werden in $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \binom{0}{0}$ oder in $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \binom{\infty}{\infty}$.

5) $f(x)^{g(x)} = (1^\infty)$ oder (0^0) oder (∞^0) können durch

$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{g(x)\ln f(x)} = e^{\lim g(x)\ln f(x)}$ auf zuvor diskutierte Fälle zurückgeführt werden.

6) Ausdrücke der Form $f(x) - g(x) = (\infty - \infty)$ müssen zuerst in eine der zuvor erwähnten Formen gebracht werden, um damit weiter arbeiten zu können.

Beispiele.

a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = \binom{0}{0} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x}{1} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)} = \binom{0}{0} = \lim\limits_{x\to0} \frac{1-\cos x}{1-\cos x+x\sin x} = \binom{0}{0} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{\sin x+\sin x+x\cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x}{2\sin x+x\cos x} = \binom{0}{0} = \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos x}{2\cos x+\cos x-x\sin x} = \frac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)^x = (0^0) = \lim\limits_{x\to 0} e^{x\ln(e^x-1)} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ln(e^x-1)}$

Nun ist $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(e^x-1) = (0\cdot\infty) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^x-1)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e^x-1}e^x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{x^2e^x}{e^x-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{2xe^x+x^2e^x}{e^x} = 0$

Somit ist $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)^x = e^0 = 1$.

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x-1}\right) = (\infty-\infty) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x-1}\right)\frac{x+\sqrt{x-1}}{x+\sqrt{x-1}} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x+\sqrt{x-1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{1+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}} = \infty$.

Bemerkung. Die Regel von de l'Hospital kann auch verwendet werden, um Grenzwerte von Folgen zu bestimmen.

Beispiel. $a_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{(x+1)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+2}{2(x+1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{2} = 1$

Beispiel. $a_n = \sqrt[n]{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$. Damit $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.