

# Differenzierbarkeit

Wir betrachten zuerst die Differenzierbarkeit reellwertiger Funktionen.

**Definition.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x^0 \in D(f)$  ein innerer Punkt.

Dann heißt  $f$  **differenzierbar** an  $x^0$ , wenn es einen Vektor  $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$  und eine auf einer Umgebung  $U(x^0)$  definierte Funktion  $f_0(x)$  gibt, sodass

- $f(x) = f(x^0) + \vec{c}(\vec{x} - \vec{x}^0) + \|x - x^0\| f_0(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x^0} f_0(x) = 0$ .

**Bemerkung.** Obige Bedingung kann auch in der Form

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x) - f(x^0) - \vec{c}(\vec{x} - \vec{x}^0)}{\|x - x^0\|} \rightarrow 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{\vec{h} \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + \vec{h}) - f(x^0) - \vec{c}\vec{h}}{\|\vec{h}\|} \rightarrow 0$$

geschrieben werden.

**Speziell.** Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  ist im Punkt  $(x_0, y_0, z_0)$  differenzierbar wenn ein Vektor  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$  existiert sodass

$$\frac{f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) - \{c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) + c_3(z - z_0)\}}{\|(x - x_0, y - y_0, z - z_0)\|} \rightarrow 0 \quad \text{für } (x, y, z) \rightarrow (x_0, y_0, z_0)$$

$$\text{bzw.} \quad \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2, z_0 + h_3) - f(x_0, y_0, z_0) - \{c_1 h_1 + c_2 h_2 + c_3 h_3\}}{\|(h_1, h_2, h_3)\|} \rightarrow 0$$

$$\text{für } (h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0, 0, 0)$$

Analoges gilt natürlich auch für eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Die lineare Approximation  $\tilde{f}(x) = f(x^0) + \vec{c}(\vec{x} - \vec{x}^0)$  stellt eine Hyperebene im  $\mathbb{R}^{n+1}$  dar. Für  $n = 1$  ist dies eine Gerade (die Tangente), für  $n = 2$  eine Ebene (die Tangentialebene).

Wesentlich ist dabei, dass die Abweichung der linearen Approximation  $\tilde{f}$  von  $f$  bei Annäherung an  $x^0$  von höherer als erster Ordnung verschwindet.

**Bemerkung.** Man kann zeigen, dass der Vektor  $\vec{c}$  durch  $f$  eindeutig bestimmt ist.

**Satz.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  an  $x^0$  differenzierbar. Dann existieren alle partiellen Ableitungen, und es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = c_k, \text{ i.e. } \vec{c} = \text{grad}f(x^0).$$

**Beweis.** Laut Voraussetzung gilt

$$f(x) = f(x^0) + \vec{c}(\vec{x} - \vec{x}^0) + \|x - x^0\|f_0(x).$$

Setzen wir  $x = x^0 + h\vec{e}_k$ , dann ist  $\vec{c}(\vec{x} - \vec{x}^0) = hc_k$  und  $\|x - x^0\| = |h|$ .

Weiters ist  $\left| \frac{f(x^0 + h\vec{e}_k) - f(x^0)}{h} - c_k \right| = |f_0(x^0 + h\vec{e}_k)|$ . Mit  $h \rightarrow 0$  erhalten wir daraus  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x^0) = c_k$ .  $\square$

**Bemerkung.** Im vorherigen Spezialfall  $n = 3$  wäre dann

$$c_1 = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}, \quad c_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}, \quad c_3 = \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)}.$$

Ist etwa  $f(x, y, z) = x^2y + z^3$  und  $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$ , dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 \quad \text{und damit } (c_1, c_2, c_3) = (2, 1, 3).$$

Es sei bereits hier erwähnt, dass  $f$  differenzierbar ist, also

$$\frac{f(x, y, z) - f(1, 1, 1) - \{2(x-1) + (y-1) + 3(z-1)\}}{\|(x-1, y-1, z-1)\|} \rightarrow 0$$

**Bemerkung.** Aus der Existenz aller partiellen Ableitungen folgt i.a. **nicht** die Differenzierbarkeit (d.h. obiger Satz ist i.a. nicht umkehrbar).

Durch den Gradienten von  $f$  wird eine Richtung im  $\mathbb{R}^n$  festgelegt. In welcher Beziehung diese Richtung zur Änderung von  $f$  steht, zeigt folgender

**Satz.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  an  $x^0$  differenzierbar. Dann ist  $f$  an  $x^0$  in jeder Richtung  $\vec{a}$  (mit  $\|\vec{a}\| = 1$ ) differenzierbar und es gilt

- (i)  $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0) = (\text{grad} f(x^0)) \cdot \vec{a}$ ,
- (ii)  $\left| \frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(x^0) \right| \leq \|\text{grad} f(x^0)\|$ .

**Beweis.** Laut Voraussetzung gilt auf einer Umgebung  $U(x^0)$

$$f(x) = f(x^0) + \text{grad} f(x^0)(\vec{x} - \vec{x}^0) + \|x - x^0\| f_0(x).$$

Mit  $x = x^0 + h\vec{a}$  und folglich  $\|x - x^0\| = |h|$  gilt dann

$$\left| \frac{f(x^0 + h\vec{a}) - f(x^0)}{h} - \text{grad} f(x^0) \cdot \vec{a} \right| = |f_0(x^0 + h\vec{a})|.$$

Mit  $h \rightarrow 0$  folgt die erste Behauptung. Die zweite Behauptung ergibt sich durch Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung.  $\square$

**Bemerkung.** Aus der zweiten Aussage des obigen Satzes wird ersichtlich, dass der Gradient von  $f$  jene Richtung angibt, in der die Änderung von  $f$  maximal ist. Dies ist etwa insofern von Bedeutung, wenn  $f$  ein Temperaturfeld beschreibt. Dann gibt der Gradient die Richtung des Wärmestromes an, da Wärme stets in Richtung des größten Temperaturgefälles fließt.

**Beispiel.** Bestimme die Richtungsableitung von  $f(x, y) = x^2 + xy$  im Punkt  $(2, 1)$  in Richtung  $45^\circ$ .

$$\vec{a} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad \text{grad} f = (2x + y, x), \quad \text{grad} f|_{(2,1)} = (5, 2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} \Big|_{(2,1)} = \text{grad} f|_{(2,1)} \cdot \vec{a} = (5, 2) \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

**Satz.** (ohne Beweis)

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  an  $x^0$  differenzierbar. Dann gilt

(i)  $\exists M > 0$  und eine Umgebung  $U(x^0)$ , auf der gilt

$$|f(x) - f(x^0)| \leq M \|x - x^0\|,$$

(ii)  $f$  ist stetig an  $x^0$ .

Wie wir bereits wissen, ist die bloße Existenz der partiellen Ableitungen

nicht hinreichend für die Stetigkeit. Erst die zusätzliche Voraussetzung der Beschränktheit der partiellen Ableitungen (auf einer Umgebung von  $x^0$ ) garantiert die Stetigkeit.

Welche zusätzliche Forderung an die partiellen Ableitungen garantiert die Differenzierbarkeit ?

**Satz.** (ohne Beweis)

Existieren für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  auf einer Umgebung  $U(x^0)$  die partiellen Ableitungen  $f_{x_1}, f_{x_2}, \dots, f_{x_n}$  und sind diese **stetig** an  $x^0$ , dann ist  $f$  differenzierbar an  $x^0$ .

**Beispiel.** Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y, z) = \sin(xyz)$ . Dann sind  $f_x = yz \cos(xyz)$ ,  $f_y = xz \cos(xyz)$ ,  $f_z = xy \cos(xyz)$  stetig in jedem  $(x, y, z)$ . Somit ist  $f$  differenzierbar in jedem  $x^0$ .

Nun zur Differenzierbarkeit vektorwertiger Funktionen.

**Definition.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $x^0 \in D(f)$  ein innerer Punkt.

Dann heißt  $f = (f_1, \dots, f_m)$  **differenzierbar** an  $x^0$ , wenn es eine  $m \times n$  Matrix  $C = (c_{\mu\nu})$  und eine auf einer Umgebung  $U(x^0)$  definierte Funktion  $f_0(x)$  (mit Werten in  $\mathbb{R}^m$ ) gibt, sodass

- $f(x) = f(x^0) + C(\vec{x} - \vec{x}^0) + \|x - x^0\| f_0(x)$
- $\lim_{x \rightarrow x^0} f_0(x) = \vec{0}$ .

**Bemerkung.**

(i) Differenzierbarkeit heißt also, dass

$$\frac{1}{\|x - x^0\|} (f(x) - f(x^0) - C(\vec{x} - \vec{x}^0)) \rightarrow \vec{0} \quad \text{für } x \rightarrow x^0.$$

(ii)  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ist genau dann differenzierbar an  $x^0$ , wenn jede Koordinatenfunktion  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar an  $x^0$  ist.

(iii) Falls  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar an  $x^0$  ist, dann ist

$$c_{\mu\nu} = \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x^0) .$$

**Definition.** Existieren für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  an einer Stelle  $x^0$  die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x^0)$ , dann heißt die Matrix

$$J_f(x^0) = \left( \frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu}(x^0) \right) = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_m)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{df}{dx}(x^0) = f'(x^0)$$

die **Jacobi-Matrix**, **Funktionalmatrix** oder **Ableitung** von  $f$ .

Die Zeilenvektoren der Jacobi-Matrix sind also die Gradienten der jeweiligen Koordinatenfunktionen. Weiters gilt

**Satz.** (Lipschitz-Bedingung für differenzierbare Funktionen)

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Existiert für  $x^0 \in D(f)$  die Jacobi-Matrix, dann gibt es ein  $\delta > 0$  und eine Schranke  $M$ , sodass für alle  $x$  mit  $\|x - x^0\| < \delta$  gilt, dass  $\|f(x) - f(x^0)\| \leq M\|x - x^0\|$ .

**Beispiele.**

1) Betrachte  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f_1(x, y) = x(1 - y)$ ,  $f_2(x, y) = xy$  besitzt die Jacobi-Matrix

$$J_f = \begin{pmatrix} 1 - y & -x \\ y & x \end{pmatrix} .$$

2) Die Polarkoordinatenabbildung  $P : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $P_1(r, \varphi) = r \cos \varphi$ ,  $P_2(r, \varphi) = r \sin \varphi$  besitzt die Jacobi-Matrix

$$J_P = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} .$$

**Satz.** (Ableitungsregeln)

1) Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  an einem inneren Punkt  $x^0$  von  $D(f)$  bzw.  $D(g)$  differenzierbar, und seien  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .

Dann ist auch die Funktion  $\lambda f + \mu g$  an  $x^0$  differenzierbar und es gilt

$$J_{\lambda f + \mu g}(x^0) = \lambda J_f(x^0) + \mu J_g(x^0) .$$

2) Seien  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  an einem inneren Punkt  $x^0$  von  $D(f)$  bzw.  $D(g)$  differenzierbar.

Dann ist auch die (reellwertige) Funktion  $f * g = \sum_{i=1}^m f_i g_i$  an  $x^0$  differenzierbar und es gilt

$$(f * g)' = \text{grad}(f * g) = \sum_{i=1}^m ((\text{grad} f_i) g_i + f_i (\text{grad} g_i)) .$$

### Satz. (Kettenregel)

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  an einem inneren Punkt  $x^0 \in D(f)$  differenzierbar und  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l$  an  $y^0 = f(x^0) \in D(g)$  differenzierbar (wobei  $y^0$  ein innerer Punkt von  $D(g)$  sei).

Dann ist  $h = g \circ f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$  an  $x^0$  differenzierbar und es gilt

$$J_h(x^0) = J_g(y^0) J_f(x^0) \quad \text{bzw.} \quad \frac{dh}{dx}(x^0) = \frac{dg}{dy}(y^0) \frac{df}{dx}(x^0) .$$

**Beispiel.** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Dann ist  $\varphi = f \circ \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J_f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$ , und

$$J_\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi'_1(t) \\ \psi'_2(t) \\ \dots \\ \psi'_n(t) \end{pmatrix} . \text{ Nach der Kettenregel ist dann}$$

$$\begin{aligned} J_\varphi(t) &= \varphi'(t) = J_f(\psi(t)) J_\psi(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\psi(t)) \psi'_i(t) = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\psi(t)) \psi'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\psi(t)) \psi'_2(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\psi(t)) \psi'_n(t) \end{aligned}$$

**Beispiel.** Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$ , und weiters

$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(u, v) = e^{uv}$ .

Bestimme die Jacobi-Matrix von  $g \circ f$  im Punkt  $(1, 1)$ .

$$J_f = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad J_f|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(1, 1) = (2, 1), \quad J_g = \begin{pmatrix} ve^{uv} & ue^{uv} \end{pmatrix}, \quad J_g|_{(2,1)} = \begin{pmatrix} e^2 & 2e^2 \end{pmatrix}$$

$$J_{g \circ f}|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} e^2 & 2e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^2 & 4e^2 \end{pmatrix}$$

Beachte auch, dass  $(g \circ f)(x, y) = e^{xy(x^2+y^2)}$ .

Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$  können ihrerseits wieder (auf gewissen Teilmengen ihres Definitionsbereiches) differenzierbar sein.

Wir nennen dann die Funktionen  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$  **partielle Ableitungen zweiter Ordnung**. Dabei wird auch die Schreibweise  $f_{x_i x_k}$  verwendet.

Rekursiv können dann (falls existent) die Ableitungen höherer Ordnung definiert werden.

Wenn für  $l = 0, 1, 2, \dots, k$  auf einer Menge  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  alle partiellen Ableitungen  $l$ -ter Ordnung von  $f$  existieren und dort stetig sind, heißt  $f$   **$k$ -mal stetig differenzierbar auf  $X$**  und man schreibt  $f \in C^k(X)$ .

### Beispiele.

(i)  $f(x, y) = x^y$  ist auf  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$  definiert und besitzt dort die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1 + y \ln x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = x^{y-1}(1 + y \ln x), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y (\ln x)^2.$$

Man beachte, dass hier  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  gilt.

(ii) Sei  $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{wenn } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{wenn } (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$

Dann gilt  $f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$  und  $f_y(0, 0) = 0$  .

Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  gilt  $f_x(x, y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$  ,  $f_y(x, y) = \frac{x(x^4 - 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2 + y^2)^2}$  .

Daraus erhalten wir  $f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - f_x(0, 0)}{h} = -1$  und  $f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = +1$  .

Also existieren zwar  $f_{xy}(0, 0)$  ,  $f_{yx}(0, 0)$  , aber  $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$  .

Für  $(x, y) \neq (0, 0)$  gilt hingegen

$$f_{xy} = f_{yx} = \frac{(x^2 - y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2 + y^2)^3} .$$

Bei Annäherung an  $(0, 0)$  entlang der Geraden  $y = x$  erhalten wir als Richtungsgrenzwert für  $f_{xy}$  und  $f_{yx}$  den Wert 0, im Gegensatz zu oben ermittelten Werten  $f_{xy}(0, 0) = -1$  bzw.  $f_{yx}(0, 0) = +1$  , d.h.  $f_{xy}$  und  $f_{yx}$  sind im Ursprung **nicht** stetig.

**Satz. (Schwarz)** (Vertauschbarkeit der Differenziationsreihenfolge)

Für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  seien  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$  und  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$  stetig an  $x^0$  .

Dann gilt  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(x^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(x^0)$  .

**Bemerkung.** Für  $C^k$ -Funktionen sind die Ableitungen bis zur  $k$ -ten Ordnung vertauschbar, weil jede Permutation der dabei beteiligten Variablen durch endlich viele spezielle Permutationen, bei denen nur zwei aufeinanderfolgende Elemente vertauscht werden, darstellbar ist.