Stammfunktionen und Integrationsmethoden

Sei I ein Intervall , f R-integrierbar für jedes $[a,b] \subseteq I$, und $x_0 \in I$.

Dann heißt die Funktion F mit

$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ **Integral von** f als Funktion der oberen Grenze (bzw. kurz Integralfunktion) .

Bemerkung. F ist stetig auf I .

Beweis. Sei $x \in I$. Wähle $[a,b]$ mit $x \in [a,b] \subseteq I$. Auf $[a,b]$ gelte $|f(x)| \leq M$. Sei nun (x_n) eine Folge aus $[a,b]$ mit $x_n \to x$. Dann gilt

$$|F(x_n) - F(x)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x_n} f(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \right| = \left| \int\limits_{x}^{x_n} f(t)dt \right| \leq \left| \int\limits_{x}^{x_n} |f(t)|dt \right| \leq$$

$\leq M|x_n - x|$. Daraus folgt $F(x_n) \to F(x)$. $\square$

Satz. (1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

f stetig in $x \in I \ \Rightarrow\ F$ differenzierbar in x und $F'(x) = f(x)$.

Beweis. Sei (x_n) eine Folge aus I mit $x_n \neq x$, $x_n \to x$. Sei weiters $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus der Stetigkeit von f an x folgt :

$\exists\ \delta_\varepsilon > 0$ mit $|t - x| < \delta_\varepsilon \ \Rightarrow\ |f(t) - f(x)| < \varepsilon$.

Weiters $\exists\ N_\varepsilon$ mit $|x_n - x| < \delta_\varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$.

Für $n > N_\varepsilon$ gilt dann

$$\left| \tfrac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} - f(x) \right| = \left| \tfrac{1}{x_n - x} \left\{ \int\limits_{x_0}^{x_n} f(t)dt - \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt \right\} - f(x) \right| =$$

$$= \left| \tfrac{1}{x_n - x} \int\limits_{x}^{x_n} f(t)dt - f(x) \right| = \tfrac{1}{|x_n - x|} \left| \int\limits_{x}^{x_n} (f(t) - f(x))dt \right| \leq$$

$$\left|\frac{1}{|x_n-x|}\int\limits_x^{x_n}|f(t)-f(x)|dt\right| \le \frac{1}{|x_n-x|}\varepsilon|x_n-x| = \varepsilon\ .$$

Dies bedeutet aber $\left|\frac{F(x_n)-F(x)}{x_n-x} - f(x)\right| \to 0$. $\square$

Definition. Die Funktionen f und F seien auf dem Intervall I definiert, F sei dort differenzierbar und es gelte $F'(x) = f(x)$.

Dann heißt F **Stammfunktion** von f auf I .

Bemerkung. Jede auf I stetige Funktion besitzt dort eine Stammfunktion, nämlich $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$.

Sind $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$ auf I , dann gilt für $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$, dass $\varphi'(x) = 0$ auf I.

Dann ist aber $\varphi = C$ .. const., also $F_1(x) = F_2(x) + C$. Somit unterscheiden sich zwei Stammfunktionen nur durch eine additive Konstante.

Bemerkung. Die Menge aller Stammfunktionen von $f(x)$ wird auch als **unbestimmtes Integral** bezeichnet und man schreibt dafür

$$\int f(x)dx + C \quad , \ C \in \mathbb{R}$$

Satz. (2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei f stetig auf $[a,b]$ und F eine Stammfunktion von f auf $[a,b]$. Dann gilt

$$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)\ .$$

Beweis. $F_1(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ ist ebenfalls eine Stammfunktion, daher existiert eine Konstante C mit $F_1(x) = F(x) + C$.

Mit $x = a$ erhalten wir $0 = F_1(a) = F(a) + C$.

Mit $x = b$ erhalten wir $F_1(b) = \int\limits_a^b f(t)dt = F(b) + C$.

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert die Behauptung. $\square$

Bemerkung. Die obige Aussage gilt auch unter der schwächeren Voraussetzung, dass f lediglich R-integrierbar auf $[a, b]$ ist.

Anmerkungen.

(i) Oft schreibt man $\int\limits_a^b f(t)dt = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$.

(ii) Ist f R-integrierbar auf $[a, b]$, dann folgt daraus **nicht** notwendigerweise, dass f eine Stammfunktion auf $[a, b]$ besitzt.

$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{wenn } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{wenn } 0 < x \leq 1 \end{cases}$ keine Stammfunktion auf $[-1, 1]$.

(iii) Hat f auf $[a, b]$ eine Stammfunktion, dann ist f **nicht** notwendigerweise R-integrierbar.

Beispiele.

1) $\int\limits_a^b e^t dt \;:\; f(x) = e^x \,,\; F(x) = e^x \;\Rightarrow\; \int\limits_a^b e^t dt = e^b - e^a$

2) $\int\limits_0^b \sqrt{t}dt \;:\; f(x) = \sqrt{x} \,,\; F(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} \;\Rightarrow\; \int\limits_0^b \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}b^{3/2}$

3) $\int\limits_1^2 \frac{1}{t}dt \;:\; f(x) = \frac{1}{x} \,,\; F(x) = \ln x \;\Rightarrow\; \int\limits_1^2 \frac{1}{t}dt = \ln x|_1^2 = \ln 2$

Differenziation und Integration sind also in gewisser Weise zueinander inverse Operationen. Ist eine Funktion $F(x)$ gegeben und setzen wir $f(x) = F'(x)$ dann ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und es gilt

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Beispiel. $F(x) = \arctan x \;\Rightarrow\; F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, also

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x \;\Rightarrow\; F'(x) = \cos 2x \;\Rightarrow\; \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C$

$F(x) = \ln|x+1| \;\Rightarrow\; F'(x) = \frac{1}{x+1} \;\Rightarrow\; \int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C$

Aus den Differenziationsregeln können nun in weiterer Folge Regeln für die Bestimmung von Stammfunktionen hergeleitet werden.

Die Produktregel besagt dass $(fg)' = f'g + fg'$. Ist nun $G(x)$ eine Stammfunktion von $f'g$ dann gilt

$$(fg - G)' = (fg)' - G' = f'g + fg' - f'g = fg' .$$

Also ist $fg - G$ eine Stammfunktion von fg' und damit

$$\int fg' dx = fg - \int f'g dx \quad \ldots \textbf{ Partielle Integration}$$

Beispiele.

(i) $I = \int xe^x dx$.

Setze $f(x) = x$ und $g'(x) = e^x$. Dann ist $f'(x) = 1$ und $g(x) = e^x$.

Folglich ist $I = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$.

(ii) $I = \int \ln x dx = \int \ln x \cdot 1 dx$.

$f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1 \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$

Folglich ist $I = \int \ln x dx = x \ln x - \int 1 \cdot dx = x \ln x - x + C$.

Aus der Kettenregel (für differenzierbare Funktionen) kann das Verfahren der **Lösung mittels Substitution** hergeleitet werden.

$(F(g(x))' = F'(g(x))g'(x) \;\Rightarrow\; F(g(x)) = \int F'(g(x))g'(x)dx + C$

Die Substitutionsregel wird in der Praxis wie folgt angewendet.

Beispiel. $I = \int \sin 2x dx$

Wir setzen $z = g(x) = 2x$. Dann ist $z' = g'(x) = 2$ bzw. $\frac{dz}{dx} = 2$
und weiters $dz = 2dx$ bzw. $dx = \frac{1}{2}dz$.

Damit kann das Integral vereinfacht werden zu

$$I = \int \frac{1}{2} \sin z dz = -\frac{1}{2} \cos z + C = -\frac{1}{2} \cos 2x + C \ .$$

Der letzte Schritt ist die sogenannte Rücksubstitution.

Beispiel. $\int \frac{\sin(3\ln x)}{x} dx$

Substitution: $z = 3\ln x \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{3}{x}$ bzw. $\frac{1}{3}dz = \frac{dx}{x}$

Damit $\int \frac{\sin(3\ln x)}{x} dx = \int \frac{1}{3} \sin z dz = -\frac{1}{3} \cos z + C = -\frac{1}{3} \cos(3\ln x) + C$

Bemerkung. Viele wichtige Substitutionen können in der Formelsammlung gefunden werden.

Bemerkung. Wegen $(\ln|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ gilt offenbar

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C \text{ , also etwa } \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln(x^2+1) + C \ .$$

Bemerkung. Ist der Integrand eine rationale Funktion dann kann zur Bestimmung des Integrals die Partialbruchzerlegung verwendet werden.

Beispiel. $I = \int \frac{x^4+x^3+2x-2}{x^3-x^2+x-1} dx$

$(x^4 + x^3 + 2x - 2) : (x^3 - x^2 + x - 1) = x + 2 + \frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1}$

$\frac{x^2+x}{x^3-x^2+x-1} = \frac{x^2+x}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+D}{x^2+1} \Rightarrow A = 1 \ , \ B = 0 \ , \ D = 1$

Damit $I = \int (x + 2 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+1}) dx =$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x-1| + \arctan x + C$$