

# Koordinatentransformation im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Bei der Diskussion der komplexen Zahlen sahen wir, dass ein Punkt der Ebene (verschieden vom Ursprung) sowohl durch seine kartesischen Koordinaten  $(x, y)$  als auch durch die sogenannte Polardarstellung  $(r, \varphi)$  beschrieben werden kann.

Liegt allgemeiner ein Zusammenhang  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  vor, dann wird dieser durch eine Abbildung  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vermittelt, wo ein Bereich der  $uv$ -Ebene in einen Bereich der  $xy$ -Ebene abgebildet wird. Man spricht dabei auch von einer **Koordinatentransformation** (der Ebene).

Ist die Abbildung  $g$  in einem Punkt lokal umkehrbar, dann heißt dieser Punkt **regulär**, andernfalls **singulär**.

**Triviales Beispiel.**  $x = u + v$ ,  $y = u - v$

Hier haben wir also  $g((u, v)) = (u + v, u - v)$ ,  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ .

Diese Abbildung ist offenbar global umkehrbar, weil  $u = \frac{x+y}{2}$ ,  $v = \frac{x-y}{2}$ .

Also ist  $g^{-1}((x, y)) = (\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2})$ .

Jeder Punkt ist ein regulärer Punkt.

**Bemerkung.** Die Frage nach der lokalen Umkehrbarkeit läßt sich zumeist mittels des Satzes über die Umkehrfunktion beantworten : die Jacobi-Determinante ist im untersuchten Punkt  $\neq 0$ .

**Beispiel.** (Ebene Polarkoordinaten)

Betrachte  $x = x(r, \varphi) = r \cos \varphi$ ,  $y = y(r, \varphi) = r \sin \varphi$ , wobei  $r \geq 0$  und  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Jeder Punkt der  $xy$ -Ebene wird durch einen Punkt des Bereiches für  $r$  und  $\varphi$  repräsentiert.

Für die Jacobi-Determinante gilt  $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$ .

Damit ist  $r = 0$  ein singulärer Punkt (besitzt keinen eindeutig definierten Winkel). Alle anderen Punkte des  $r\varphi$ -Bereiches sind regulär.

Die Umkehrfunktion läßt sich im Falle  $x \neq 0$  mittels

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad \text{beschreiben.}$$

**Aufgabe.** Man zeige, dass durch  $x(u, v) = u + v$ ,  $y(u, v) = \frac{v}{u}$  der erste Quadrant der  $xy$ -Ebene in den ersten Quadranten der  $uv$ -Ebene abgebildet wird. Man bestimme auch die Umkehrfunktion.

Wichtige Koordinatentransformationen im  $\mathbb{R}^3$ :

### Zylinderkoordinaten

$x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z$ , wobei  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .

Für die Jacobi-Determinante gilt

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Somit besteht die  $z$ -Achse aus singulären Punkten.

Die Umkehrung ist durch  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$ ,  $z = z$  gegeben.

### Kugelkoordinaten

$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \vartheta$  wobei

$r \geq 0$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Beachte, dass  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ . Der Winkel  $\vartheta$  wird von der positiven  $z$ -Achse weg gemessen.

Für die Jacobi-Determinante erhalten wir

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} = \dots = r^2 \sin \vartheta$$

$r = 0$  (der Ursprung) ist ein singulärer Punkt,  $\sin \vartheta = 0$  wenn  $\vartheta = 0$  oder  $\vartheta = \pi$ . Damit sind alle Punkte der  $z$ -Achse singuläre Punkte (sie besitzen keinen eindeutig bestimmten Winkel  $\varphi$ ).

Als **Koordinatenlinien** erhalten wir

$r, \varphi$  konstant,  $\vartheta$  beliebig : Meridiane (Längengrade)

$r, \vartheta$  konstant,  $\varphi$  beliebig : Breitenkreise

$\vartheta, \varphi$  konstant,  $r$  beliebig : Strahlen

Als **Koordinatenflächen** erhalten wir

$r$  konstant,  $\vartheta, \varphi$  beliebig : Kugelflächen

$\varphi$  konstant,  $r, \vartheta$  beliebig : Halbebenen durch  $z$ -Achse

$\vartheta$  konstant,  $r, \varphi$  beliebig : Kegel