Doppel- und Dreifachintegrale

Sei $[a,b]$ ein Intervall des $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ (also ein Rechteck bzw. ein Quader) , i.e.

$$[a,b] = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \quad \text{oder} \quad [a,b] = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3] \ .$$

Für Intervalle des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ (und analog für Intervalle des $\mathbb{R}^n$) können ebenfalls Partitionen erklärt werden,

$$\begin{aligned} P[a,b]: \quad & a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_l = b_1 \\ & a_2 = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b_2 \qquad \text{bzw.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[a,b]: \quad & a_1 = x_0 < x_1 < \ldots < x_l = b_1 \\ & a_2 = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = b_2 \\ & a_3 = z_0 < z_1 < \ldots < z_n = b_3 \end{aligned}$$

Im Zusammenhang damit erklären wir **Riemannsche Summen** bzgl. einer reellwertigen Funktion f

$$S_P(f;\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_i,\eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \qquad \text{bzw.}$$

$$S_P(f;\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

wobei ξ,η,ζ die Wahl von entsprechenden "Zwischenpunkten" ξ_i,η_j,ζ_k bezeichnet.

Definition. Sei $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (bzw. $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) . Dann heißt f R**-integrierbar** auf $[a,b]$, wenn jede "Zerlegungsnullfolge" $P^{(n)}$ mit $|P^{(n)}| \to 0$ gegen ein und denselben Wert konvergiert, i.e.

$$\lim_{n\to\infty} S_{P^{(n)}}(f;\xi^{(n)},\eta^{(n)}) = I_2(f) \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} S_{P^{(n)}}(f;\xi^{(n)},\eta^{(n)},\zeta^{(n)}) = I_3(f)$$

(unabhängig von der Wahl der Zwischenpunkte ξ,η,ζ)

Schreibweise.

$$I_2(f) = \iint\limits_{[a,b]} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]} f(x,y)dxdy$$

$$I_3(f) = \iiint\limits_{[a,b]} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]} f(x,y,z)dxdydz$$

Satz. (ohne Beweis)

Falls f "stückweise stetig" auf $[a,b]$ ist, dann ist f R-integrierbar auf $[a,b]$.

Bemerkung. Dabei heißt f stückweise stetig, wenn f stetig in allen Punkten von $[a,b]$ ist mit Ausnahme von Punkten einer Menge C , die als Vereinigung von endlich vielen Kurven (im $\mathbb{R}^2$) bzw. als Vereinigung von endlich vielen Flächen (im $\mathbb{R}^3$) darstellbar ist.

Definition. $N \subseteq \mathbb{R}^2$ (bzw. $N \subseteq \mathbb{R}^3$) heißt **Nullmenge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ endlich viele Rechtecke (bzw. Quader) A_n gibt, sodass

$$N \subseteq \bigcup_n A_n \quad \text{und} \quad \sum_n |A_n| < \varepsilon \ ,$$

wobei $|A_n|$ den üblichen Flächeninhalt eines Rechtecks (bzw. Volumen eines Quaders) bezeichnet.

Satz. (ohne Beweis)

f ist R-integrierbar auf $[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f ist stetig auf $[a,b]$ bis auf eine Nullmenge.

Konkrete Berechnung von Doppel- und Dreifachintegralen

$$S_P(f;\xi,\eta) = \sum_{j=1}^{m} (y_j - y_{j-1}) \sum_{i=1}^{l} f(\xi_i,\eta_j)(x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^{l} f(\xi_i,y)(x_i - x_{i-1}) = \phi(y) = S_P(f;\xi) \underset{|P|\to 0}{\longrightarrow} \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx \ ,$$

wobei y ein Parameter ist. Daraus folgt

$\sum\limits_{j=1}^{m} \phi(\eta_j)(y_j - y_{j-1}) = \sum\limits_{j=1}^{m} \left(\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,\eta_j)dx \right)(y_j - y_{j-1})$ + ein Rest, der mit $|P| \to 0$ gegen Null strebt.

Insgesamt erhalten wir $S_P(f;\xi,\eta) \underset{|P|\to 0}{\longrightarrow} \int\limits_{a_2}^{b_2} \left(\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx \right) dy$.

Hierfür verwendet man auch die Schreibweise

$$\int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx$$

Bemerkung. Analoges gilt auch für Dreifachintegrale.

Satz. (**Fubini**)

Sei f auf $[a,b]$ stückweise stetig und beschränkt. Dann existiert

$\iint\limits_{[a,b]} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{[a,b]} f(x,y)dA$ und es gilt

$$\iint\limits_{[a,b]} f(x,y)dA = \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x,y)dx = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)dy$$

Bemerkung. Analoges gilt auch für Dreifachintegrale. Unter den Voraussetzungen des Satzes von Fubini ist also die "Reihenfolge der Integration" unwesentlich.

Beispiel. Man bestimme $\iint\limits_{B} \frac{1}{(x+y^2)^{3/2}} dA$, wobei B gegeben ist durch

$B: \; 0 \le x \le 1 \; , \; 1 \le y \le 2$.

$$\iint\limits_{B} \frac{1}{(x+y^2)^{3/2}} dA = \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{(x+y^2)^{3/2}} dx = -2 \int\limits_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x+y^2}} \Big|_{x=0}^{1} dy =$$

$$= -2 \int\limits_{1}^{2} \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} + 2 \int\limits_{1}^{2} \frac{dy}{y} = -2\text{arsinh}2 + 2\text{arsinh}1 + 2\ln 2 \; .$$

Hier wäre $\int\limits_0^1 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y^2)^{3/2}}$ ungünstig gewesen!

Bislang sind wir lediglich in der Lage, über ein Intervall (Rechteck im $\mathbb{R}^2$ bzw. Quader im $\mathbb{R}^3$) zu integrieren. Durch Anwendung des Satzes von Fubini werden wir in der Lage sein, auch über allgemeinere Bereiche zu integrieren.

Definition. $B \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt **Normalbereich bzgl. der x-Achse**, wenn es zwei Zahlen a , b und zwei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ gibt, sodass B beschrieben werden kann durch

$$B = \{(x, y) \ : \ a \leq x \leq b \ , \ f(x) \leq y \leq g(x)\} \ .$$

Analog ist ein Normalbereich bzgl. der y-Achse beschrieben durch

$$B = \{(x, y) \ : \ f(y) \leq x \leq g(y) \ , \ c \leq y \leq d\} \ .$$

Definition. $B \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **Normalbereich bzgl. der xy-Ebene**, wenn es zwei Zahlen a , b , zwei Funktionen $u(x)$, $v(x)$ auf $[a, b]$ sowie zwei Funktionen $f(x, y)$, $g(x, y)$ auf

$A = \{(x, y) \ : \ a \leq x \leq b \ , \ u(x) \leq y \leq v(x)\}$ gibt, sodass B darstellbar ist durch

$$B = \{(x, y, z) \ : \ a \leq x \leq b \ , \ u(x) \leq y \leq v(x) \ , \ f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\} \ .$$

Normalbereiche bzgl. der anderen Koordinatenebenen sind analog definiert.

Bemerkung. A stellt die Projektion von B auf die xy-Ebene (bzw. die jeweilige Koordinatenebene) dar.

Ein Normalbereich im engeren Sinne ist ein Normalbereich bzgl. beider Koordinatenachsen (im $\mathbb{R}^2$) bzw. aller Koordinatenebenen (im $\mathbb{R}^3$).

Beispiel. (i) Die Fläche des Einheitskreises im $\mathbb{R}^2$ kann als Normalbereich dargestellt werden, nämlich durch

$$-1 \leq x \leq 1 \quad , \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq +\sqrt{1-x^2}$$

(ii) Die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten $P_1(0,0)$, $P_2(2,0)$, $P_3(1,3)$ kann als Normalbereich bzgl. der y-Achse dargestellt werden, nämlich durch

$$0 \leq y \leq 3 \quad , \quad \tfrac{y}{3} \leq x \leq 2 - \tfrac{y}{3}$$

Frage. Gegeben seien die Punkte $P_1(0,0)$, $P_2(2,1)$, $P_3(1,3)$. Kann die dadurch definierte Dreiecksfläche als Normalbereich bzgl. der x-Achse bzw. der y-Achse dargestellt werden?

Bemerkung. Für das Integral über einen Normalbereich bzgl. der x-Achse gilt dann

$$\iint\limits_B h(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)dy \ .$$

Für das Integral über einen Normalbereich bzgl. der xy-Ebene gilt

$$\iiint\limits_B h(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_B h(x,y,z)dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{u(x)}^{v(x)} dy \int\limits_{f(x,y)}^{g(x,y)} h(x,y,z)dz$$

Die Integrale über die anderen Normalbereiche sind analog definiert.

Beispiel. Sei das Ellipsoid $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1$ gegeben.

Die Projektion in die xy-Ebene ist $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1$.

Also kann das Ellipsoid beschrieben werden durch

$$-a \leq x \leq a$$

$$-b\sqrt{1-\left(\tfrac{x}{a}\right)^2} \leqslant y \leqslant b\sqrt{1-\left(\tfrac{x}{a}\right)^2}$$

$$-c\sqrt{1-\left(\tfrac{x}{a}\right)^2-\left(\tfrac{y}{b}\right)^2} \leqslant z \leqslant c\sqrt{1-\left(\tfrac{x}{a}\right)^2-\left(\tfrac{y}{b}\right)^2}$$

Beispiel. Man bestimme $I = \iint\limits_B xydxdy$, wobei B das Dreieck mit den Eckpunkten $P_1(0,0)$, $P_2(2,0)$, $P_3(1,3)$ ist.

Von vorher wissen wir, dass B durch $0 \leq y \leq 3$, $\frac{y}{3} \leq x \leq 2 - \frac{y}{3}$ beschrieben werden kann.

Also ist $I = \int\limits_{y=0}^{3} [\int\limits_{x=\frac{y}{3}}^{2-\frac{y}{3}} xydx]dy = \int\limits_{y=0}^{3} \frac{x^2}{2}y \,|_{\frac{y}{3}}^{2-\frac{y}{3}} \; dy =$

$= \int\limits_{y=0}^{3} (2y - \frac{2}{3}y^2)dy = (y^2 - \frac{2}{9}y^3) \,|_0^3 = 3$

Bemerkung. Ist ein vorliegender Bereich B kein Normalbereich, so läßt er sich oft in Normalbereiche $B_1, B_2, \cdots, B_n$ zerlegen, wobei $B_i \cap B_j$ nur jeweils Randpunkte enthält.

Für das Integral über B gilt dann eine entsprechende Additivitätseigenschaft.

Bemerkung. Ist $B \subseteq \mathbb{R}^2$ (bzw. $B \subseteq \mathbb{R}^3$) ein Normalbereich, dann erhalten wir durch $\iint\limits_B dxdy$ (bzw. $\iiint\limits_B dxdydz$) den **Flächeninhalt** von B (bzw. das **Volumen** von B).

Dies gilt auch für Bereiche, die sich aus Normalbereichen zusammensetzen lassen.

Eigenschaften von Mehrfachintegralen.

Im folgenden seien f bzw. g stets stückweise stetig, und der Bereich B stückweise glatt.

Mittels Riemannscher Summen kann man die Linearität, Additivität und Positivität nachweisen.

- (**Linearität**) $\int\limits_B \cdots \int [\lambda f(x_1, \cdots, x_n) + \mu g(x_1, \cdots, x_n)]dx_1 \cdots dx_n =$

$$= \lambda \int_B \cdots \int f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n + \mu \int_B \cdots \int g(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

- (**Additivität**) Sei $B_1, \cdots, B_m$ eine Zerlegung von B, wobei $B_1 \cup \cdots \cup B_m = B$ und $B_i \cap B_j$ nur Randkomponenten von B_i bzw. B_j enthält.

$$\int_B \cdots \int f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n =$$

$$\int_{B_1} \cdots \int f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n + \cdots + \int_{B_m} \cdots \int f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n$$

- (**Positivität**) Sei $f(x_1, \cdots, x_n) \geq 0$ auf B.

Dann gilt $\int_B \cdots \int f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \geq 0$.

Folgerung. Ist $f \geq g$ auf B, dann ist

$$\int_B \cdots \int f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \geq \int_B \cdots \int g(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n .$$

(Beweis: Verwende $h = f - g$)

Weiters gilt die **Betragsungleichung**

$$\left| \int_B \cdots \int f(x_1, \cdots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \right| \leq \int_B \cdots \int |f(x_1, \cdots, x_n)| dx_1 \cdots dx_n$$

Beweis. Ist $\int_B \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n \geq 0$, dann gilt wegen $f \leq |f|$

$$\left| \int_B \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n \right| = \int_B \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n \leq \int_B \cdots \int |f| dx_1 \cdots dx_n .$$

Ist $\int_B \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n \leq 0$, dann gilt wegen $-f \leq |f|$

$$\left| \int_B \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n \right| = -\int_B \cdots \int f dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \int_B \cdots \int (-f) dx_1 \cdots dx_n \leq \int_B \cdots \int |f| dx_1 \cdots dx_n . \quad \square$$

Satz. (**Mittelwertsatz**)

Sei f stetig auf einem zusammenhängenden kompakten Bereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$. Dann existiert ein Punkt $P(\xi, \eta, \zeta)$, sodass

$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{Vol(B)} \iiint_B f(x, y, z)\, dV$, wobei

$Vol(B) = \iiint_B 1 \cdot dV$ das Volumen von B bezeichnet.

Beweis. Weil f stetig auf der kompakten Menge B ist, werden das Maximum und das Minimum angenommen, d.h. $\exists\ P_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ sodass $f(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) = m$, $\exists\ P_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ sodass $f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = M$ und $m \leq f(x, y, z) \leq M$ auf B .

Damit gilt

$mVol(B) = m \iiint_B 1 \cdot dV \leq \iiint_B f(x, y, z) dV \leq M \iiint_B 1 \cdot dV = MVol(B)$

Folglich $m \leq \mu(f) = \frac{1}{Vol(B)} \iiint_B f(x, y, z) dV \leq M$ ($\mu(f)$ heißt auch der Mittelwert von f) .

Weil B zusammenhängend ist, gibt es einen Polygonzug, also eine stetige Kurve $C : (x(t), y(t) z(t))$ mit Anfangspunkt P_0 und Endpunkt P_1 , welche ganz in B verläuft.

Betrachte nun die stetige Funktion $\varphi(t) = f(x(t), y(t), z(t))$. Nach dem Zwischenwertsatz wird jeder Wert zwischen Minimum und Maximum von φ angenommen, d.h. $\exists\ t^* : \varphi(t^*) = \mu(f)$.

Der gesuchte Punkt ist dann $P(\xi, \eta, \zeta) = P(x(t^*), y(t^*), z(t^*)$. $\square$

Bemerkungen.

(i) Im 1. Mittelwertsatz der Integralrechnung wurde gezeigt, dass

$\int\limits_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi)$, $a \leq \xi \leq b$ bzw.

$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x) dx$ und $Vol(I) = b - a$.

(ii) Der Mittelwertsatz gilt auch in analoger Weise für den $\mathbb{R}^n$.