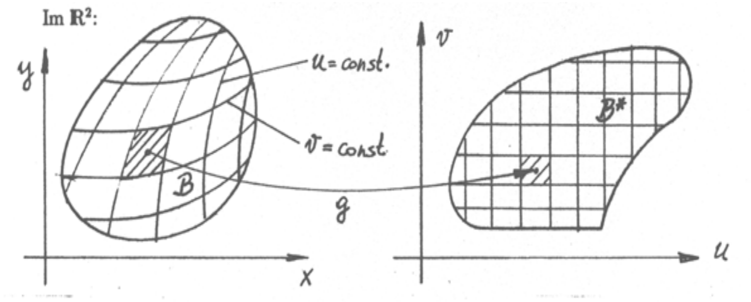
Transformationsformel



Wir betrachten die Koordinatentransformation $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ und die Abbildung $g : B \to B^*$ sei bijektiv.

Des weiteren sei die Abbildung f stückweise stetig auf B .

Dann gilt

Satz. (**Transformationsformel im** $\mathbb{R}^2$) (ohne Beweis)

$$\iint_B f(x, y)dxdy = \iint_{B^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Dabei ist $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ der **Absolutbetrag der Jacobi-Determinante**.

Bemerkung. $dxdy$ transformiert sich also in $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$.

Plausible Begründung. $\iint_B f(x, y)dxdy$ ist der Limes einer Riemann-Summe über Rechteckszerlegungen in der xy-Ebene.

Jeder solchen Zerlegung entspricht eine Zerlegung in "verzerrte" Rechtecke (näherungsweise Parallelogramme) in der uv-Ebene, i.e.

$S_P(f; \xi, \eta) = \sum\sum f(x(\tilde{u}, \tilde{v}), y(\tilde{u}, \tilde{v})) \times$Flächeninhalt
des krummlinigen Rechtecks.

Ist $g : \; x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ stetig differenzierbar, dann ist eine Linearisierung möglich, d.h. die krummlinigen Rechtecke lassen sich durch Parallelogramme approximieren.

Mit $\vec{t}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix}$, $\vec{t}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ erhalten wir für die Fläche des Parallelogramms

$$\left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| .$$

Also

$$S_P(f;\xi,\eta) \approx \sum_i \sum_j f(x(\tilde{u},\tilde{v}), y(\tilde{u},\tilde{v})) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| \triangle u_i \triangle v_j \to \iint_B f(x,y)dxdy$$

für $|P| \to 0$.

Im $\mathbb{R}^3$ erhalten wir analog

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{B^*} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw .$$

Beispiel. $I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \sqrt{1+x^2+y^2}\; dxdy$

Einführung von Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $\Rightarrow$

$\left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} \right| = r$. Also

$$I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \sqrt{1+x^2+y^2}dxdy = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} r\sqrt{1+r^2}drd\varphi = 2\pi \int\limits_0^1 r\sqrt{1+r^2}dr =$$

$$= \frac{2\pi}{3}(1+r^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}(\sqrt{8}-1) .$$

Beispiel. $I = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant R^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{R} re^{-r^2}drd\varphi =$

$$= 2\pi\left(-\tfrac{1}{2}\right) \int\limits_0^R -2re^{-r^2}dr = -\pi\, e^{-r^2}\Big|_0^R = \pi(1-e^{-R^2}) .$$

Speziell ergibt sich für $R \to \infty$: $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \pi$.

Bemerkung. Betrachten wir das uneigentliche Integral

$I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy$, dann können wir schreiben

$$\iint\limits_{R^2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = I^2 \ ,$$

also $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Beispiel. Man berechne das Volumen des von den Flächen $z = \sqrt{2 + x^2 + y^2}$ und $z = x^2 + y^2$ eingeschlossenen Bereichs.

Die erste Fläche ist der obere Teil eines zweischaligen Rotationshyperboloids, die zweite ist ein Rotationsparaboloid (beide Male mit der z-Achse als Rotationsachse.

Durch Gleichsetzen der z-Werte erhalten wir die Projektion der Schnittkurve in die xy-Ebene, i.e. $\sqrt{2 + x^2 + y^2} = x^2 + y^2$

Wir verwenden nun Zylinderkoordinaten. Dann ist die Projektion der Schnittkurve in die xy-Ebene gegeben durch $\sqrt{2 + r^2} = r^2$ bzw. $2 + r^2 = r^4$. Die einzige positive reelle Lösung ist für $r = \sqrt{2}$.

Damit kann der Volumsbereich beschrieben werden durch

$$0 \le r \le \sqrt{2} \ , \ 0 \le \varphi \le 2\pi \ , \ r^2 \le z \le \sqrt{2 + r^2}$$

Das Volumselement ist $dV = dxdydz = rdrd\varphi dz$, also

$$V = \int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{z=r^2}^{\sqrt{2+r^2}} rdrd\varphi dz = \int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} (\sqrt{2 + r^2} - r^2) rdrd\varphi =$$

$$= 2\pi \int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}} (r\sqrt{2 + r^2} - r^3) dr = 2\pi \left(\frac{(2+r^2)^{3/2}}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3} (5 - 2\sqrt{2})$$