Elemente der mengentheoretischen Topologie

Es hat sich herausgestellt, dass das Konzept des topologischen Raumes die geeignete Struktur darstellt für die in der Analysis fundamentalen Begriffe wie "konvergente Folge" oder "Stetigkeit". Darüberhinaus sind etwa die Konzepte "Kompaktheit" oder "Zusammenhang" rein topologischer Natur.

Sei X eine Menge. Eine Mengenfamilie $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt eine **Topologie** auf X , wenn

Top 1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$

Top 2) $O_1, O_2 \in \tau \quad \Rightarrow \quad O_1 \cap O_2 \in \tau$

Top 3) $O_i \in \tau \;\; , \; \forall\, i \in I \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i \in I} O_i \in \tau$

Das Paar (X, τ) heißt **topologischer Raum** und die Elemente von τ heißen **offene Mengen** von (X, τ) .

Man erhält also einen topologischen Raum, indem gewisse Teilmengen einer "Trägermenge" X als "offene Mengen" ausgezeichnet werden, sodass der Durchschnitt endlich vieler und die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen wieder offen ist.

Seien τ, σ Topologien auf X . Gilt $\tau \subseteq \sigma$ dann heißt τ **gröber** als σ , und σ **feiner** als τ .

BEISPIELE für topologische Räume.

1) Sei X eine Menge und $\tau = \mathcal{P}(X)$. Dann heißt τ die **diskrete Topologie** . Jede Teilmenge von X ist offen. τ ist die feinste Topologie auf X .

2) Sei X eine Menge und $\tau = \{\emptyset, X\}$. Dann heißt τ die **indiskrete Topologie** . τ ist die gröbste Topologie auf X .

3) Sei $X = \mathbb{R}$ und $\tau = \{O \subseteq \mathbb{R}$: zu jedem $x \in O$ gibt es ein offenes Intervall I_x mit $x \in I_x \subseteq O\}$.

Dies ist die "natürliche" Topologie, die in der Analysis betrachtet wird.

4) Sei (X, d) ein metrischer Raum.

Zu $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ heißt $K(x, \varepsilon) = \{y \in X \ : \ d(x, y) < \varepsilon\}$ die **offene ε-Kugel** um x .

Alle Teilmengen $O \subseteq X$ wo es zu jedem $x \in O$ ein $\varepsilon_x > 0$ gibt mit $K(x, \varepsilon_x) \subseteq O$ bilden die sogenannte **metrische Topologie** (bzw. die von der Metrik d induzierte Topologie).

5) Sei X eine Menge und $\tau = \{O \subseteq X \ : \ X \setminus O$ ist endlich$\}$. Dann heißt τ die **cofinite Topologie**.

6) Seien τ_i , $i \in I$ Topologien auf X . Dann ist $\tau = \bigcap\limits_{i \in I} \tau_i$ ebenfalls eine Topologie.

Die strukturverträglichen Abbildungen zwischen topologischen Räumen sind die stetigen Abbildungen.

Definition. Seien (X, τ) , (Y, σ) topologische Räume.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig** wenn das Urbild jeder offenen Menge in (Y, σ) offen in (X, τ) ist, i.e.

$$V \in \sigma \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(V) \in \tau$$

Beispiele.

1) Zu einem Raum (X, τ) ist die identische Abbildung $\mathrm{id}_X : X \to X$ stetig.

2) Zu Räumen (X, τ) und (Y, σ) ist jede **konstante** Abbildung stetig.

Sei etwa $f : X \to Y$ mit $f(x) = y_0 \ \forall \, x \in X$.

Dann ist für $V \in \sigma$, $f^{-1}(V) = X$ wenn $y_0 \in V$, und $f^{-1}(V) = \emptyset$ wenn $y_0 \notin V$.

3) Ist τ die diskrete Topologie auf X , dann ist **jede** Abbildung $f : X \to Y$ stetig.

Satz. Seien (X,τ) , (Y,σ) , (Z,ρ) topologische Räume und $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig.

Dann ist $h = g \circ f : X \to Z$ stetig.

Beweis. Sei $W \subseteq Z$, $W \in \rho$.

Dann ist $g^{-1}(W) \in \sigma$, weil g stetig ist, und $f^{-1}(g^{-1}(W)) = h^{-1}(W) \in \tau$, weil f stetig ist. $\square$

Definition. Sei (X,τ) ein topologischer Raum und $x \in X$ (bzw. $A \subseteq X$).

Dann heißt $U \subseteq X$ eine **Umgebung** von $x \in X$ (bzw. von $A \subseteq X$) , wenn es eine offene Menge $O \in \tau$ gibt mit

$$x \in O \subseteq U \qquad (\text{bzw. } A \subseteq O \subseteq U)$$

Die Menge aller Umgebungen von x wird mit $\mathcal{U}(x)$ bezeichnet.

$\mathcal{U}(x)$ besitzt folgende Eigenschaften:

(a) $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{U}(x)$

(b) $U_1, U_2 \in \mathcal{U}(x) \quad \Rightarrow \quad U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}(x)$

(c) $U \in \mathcal{U}(x)$, $U \subseteq V \quad \Rightarrow \quad V \in \mathcal{U}(x)$

Beispiel. Sei (X,d) ein metrischer Raum und τ_d die metrische Topologie.

Dann ist $U \subseteq X$ genau dann eine Umgebung von $x \in X$ wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $K(x,\varepsilon) \subseteq U$.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum und (x_n) eine Folge in X .

Dann heißt (x_n) **konvergent** gegen $x \in X$, $x_n \to x$, wenn es zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit

$x_n \in U$ für alle $n \geq N$.

D.h. außerhalb einer Umgebung von x liegen nur endlich viele Folgenglieder.

Bemerkungen.

(a) Ist τ die diskrete Topologie auf X , dann sind nur diejenigen Folgen konvergent, die ab einem Index konstant sind (weil $\{x\}$ stets offen ist).

Ist τ die indiskrete Topologie auf X , dann konvergiert jede Folge gegen jeden Punkt.

(b) Im Raum $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie ist eine Folge (x_n) genau dann konvergent gegen x wenn in jeder ε-Kugel $K(x, \varepsilon)$ fast alle Folgenglieder liegen.

Eng verbunden mit dem Begriff der Konvergenz sind die Begriffe **Filter** und **Filterbasis**.

Definition. Sei X eine beliebige Menge.

(1) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **Filter** auf X , wenn

(F1) $\mathcal{F} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$

(F2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \quad \Rightarrow \quad F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

(F3) $F \in \mathcal{F}$, $F \subseteq F^* \quad \Rightarrow \quad F^* \in \mathcal{F}$

(2) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt **Filterbasis** auf X , wenn

(FB1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathcal{B}$

(FB2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \quad \Rightarrow \quad \exists\ B_3 \in \mathcal{B}$ mit $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

(3) Seien $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ Filter auf X . Gilt $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, dann heißt $\mathcal{F}_1$ **gröber** als $\mathcal{F}_2$, und $\mathcal{F}_2$ **feiner** als $\mathcal{F}_1$.

Bemerkung. Sei $\mathcal{B}$ eine Filterbasis auf X und

$$\mathcal{F} = \{F \subseteq X \ : \ \exists\ B \in \mathcal{B} \ \text{ mit } \ B \subseteq F\}$$

Dann ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf X (Beweis zur Übung), und heißt der von $\mathcal{B}$ **erzeugte Filter**.

Beispiele.

(1) Sei X eine unendliche Menge.

Dann ist $\mathcal{F} = \{F \subseteq X \ : \ X \setminus F \text{ ist endlich}\}$ ein Filter.

(2) Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\mathcal{U}(x)$ ein Filter, der **Umgebungsfilter** von $x \in X$.

Die Familie aller **offenen** Umgebungen bildet hingegen eine Filterbasis.

(3) Sei (x_n) eine Folge auf der Menge X . Für jedes $m \in \mathbb{N}$ sei

$$S_m = \{x_n \ : \ n \geq m\} \quad \ldots \text{ das } m\text{-te Endstück der Folge } (x_n)$$

Dann ist $\mathcal{B} = \{S_m \ : \ m \in \mathbb{N}\}$ eine Filterbasis, und der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter $\mathcal{F}$ heißt der **Elementarfilter** der Folge (x_n) .

Der Elementarfilter von (x_n) besteht somit aus allen Teilmengen von X welche ein Endstück der Folge enthalten.

(4) Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $f : X \to Y$.

Dann ist $\mathcal{B} = \{f(F) \ : \ F \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis auf Y , weil $f(F_1 \cap F_2) \subseteq f(F_1) \cap f(F_2)$.

Der davon erzeugte Filter $f(\mathcal{F})$ heißt der **Bildfilter** von $\mathcal{F}$ unter f .

Somit $f(\mathcal{F}) = \{V \subseteq Y \ : \ \exists\ F \in \mathcal{F} \ \text{ mit } \ f(F) \subseteq V\}$

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt **konvergent** gegen $x \in X$, $\mathcal{F} \to x$, wenn $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$.

Eine Filterbasis $\mathcal{B}$ heißt konvergent gegen $x \in X$ wenn der von $\mathcal{B}$ erzeugte Filter gegen x konvergiert.

Bemerkungen.

(a) Trivialerweise gilt stets $\mathcal{U}(x) \to x$.

(b) In einem topologischen Raum (X, τ) konvergiert eine Folge (x_n) genau dann gegen x wenn der Elementarfilter von (x_n) gegen x konvergiert. (Beweis zur Übung)

Definition. Seien (X, τ) , (Y, σ) topologische Räume.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **stetig im Punkt** $x_0 \in X$, wenn es zu jeder Umgebung $V \in \mathcal{U}(f(x_0))$ eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ gibt mit $f(U) \subseteq V$.

Bemerkung. Sei $f : X \to Y$ stetig in $x_0 \in X$. Dann gilt für jede Folge (x_n) mit $x_n \to x_0$ dass $f(x_n) \to f(x_0)$ (dies ist die sogenannte Folgenstetigkeit in x_0).

In $\mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie gilt auch die Umkehrung. Aus der Folgenstetigkeit in x_0 folgt die Stetigkeit in x_0 .

Allerdings ist die Umkehrung in beliebigen topologischen Räumen **nicht** erfüllt.

Satz. Seien (X, τ) , (Y, σ) topologische Räume und $f : X \to Y$ und $x_0 \in X$.

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) f ist stetig in x_0 ,

(2) Für jeden Filter $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F} \to x_0$ gilt $f(\mathcal{F}) \to f(x_0)$,

(3) $\forall\ V \in \mathcal{U}(f(x_0))$ gilt $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x_0)$.

Beweis.

(1) $\Rightarrow$ (2) : Sei f stetig in x_0 und $\mathcal{F} \to x_0$. Zu zeigen ist $\mathcal{U}(f(x_0)) \subseteq f(\mathcal{F})$.

Sei $V \in \mathcal{U}(f(x_0))$. Laut Vor. existiert ein $U \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $f(U) \subseteq V$.

Weil $U \in \mathcal{F}$ ist dann $V \in f(\mathcal{F})$.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Sei $V \in \mathcal{U}(f(x_0))$.

Weil $\mathcal{U}(x_0) \to x_0$ gilt $f(\mathcal{U}(x_0)) \to f(x_0)$. Also ist $V \in f(\mathcal{U}(x_0))$.

Folglich gibt es ein $U \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $f(U) \subseteq V$ bzw. $U \subseteq f^{-1}(V)$.

Damit $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x_0)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Sei $V \in \mathcal{U}(f(x_0))$. Dann ist $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $f(U) \subseteq V$. $\square$

Satz. Seien (X, τ) , (Y, σ) topologische Räume und $f : X \to Y$.

Dann ist f genau dann stetig wenn f stetig in jedem $x \in X$ ist.

Beweis.

Sei f stetig und $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Dann existiert ein $W \in \sigma$ mit $f(x) \in W \subseteq V$.

Setze $U = f^{-1}(W)$. Dann ist $U \in \tau$ und wegen $x \in U$ eine offene Umgebung von x mit $f(U) \subseteq W \subseteq V$.

Sei f stetig in jedem $x \in X$ und $V \in \sigma$.

Zu $x \in f^{-1}(V)$ ist $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Folglich existiert $U_x \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U_x) \subseteq V$ bzw. $U_x \subseteq f^{-1}(V)$.

Wähle $O_x \in \tau$ mit $x \in O_x \subseteq U_x$ für jedes $x \in f^{-1}(V)$.

Damit $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} \{x\} \subseteq \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} O_x \subseteq \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} U_x \subseteq f^{-1}(V)$.

Also ist $f^{-1}(V) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(V)} O_x \in \tau$. $\square$

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum, und $A \subseteq X$.

(i) A heißt **abgeschlossen** wenn $X \setminus A \in \tau$.

(ii) $x \in X$ heißt **innerer Punkt** von A wenn $A \in \mathcal{U}(x)$, i.e. es gibt eine offene Menge O mit $x \in O \subseteq A$.

Die Menge aller inneren Punkte von A wird mit $\mathrm{int}A$ bezeichnet, und heißt das **Innere** von A .

(iii) $x \in X$ heißt **Berührungspunkt** von A wenn für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt dass $U \cap A \neq \emptyset$.

Die Menge aller Berührungspunkte von A wird mit $\overline{A}$ bezeichnet, und heißt die **abgeschlossene Hülle** von A .

Satz. Sei (X, τ) ein topologischer Raum, und $A \subseteq X$.

1) $\mathrm{int}A$ ist die größte in A enthaltene offene Menge.

2) $\overline{A}$ ist die kleinste A umfassende abgeschlossene Menge.

3) $X \setminus \mathrm{int}A = \overline{X \setminus A}$, $X \setminus \overline{A} = \mathrm{int}(X \setminus A)$

Beweis.

zu 1): Offenbar ist $\mathrm{int}A \subseteq A$. Sei $x \in \mathrm{int}A$. Dann gibt es eine offene Menge O_x mit $x \in O_x \subseteq A$.

Weil $O_x \in \mathcal{U}(y)$ für jedes $y \in O_x$ ist, gilt $A \in \mathcal{U}(y)$ für jedes $y \in O_x$.

Damit ist $O_x \subseteq \mathrm{int}A$, und folglich $\mathrm{int}A = \bigcup\limits_{x \in \mathrm{int}A} O_x$.

Also ist $\mathrm{int}A$ eine offene Menge.

Sei nun G eine offene Menge mit $G \subseteq A$. Dann ist $A \in \mathcal{U}(y)$ für jedes $y \in G$, und folglich $G \subseteq \mathrm{int}A$.

Damit ist $\mathrm{int}A$ ist die größte in A enthaltene offene Menge.

zu 2): Offenbar ist $A \subseteq \overline{A}$. Sei $x \in X \setminus \overline{A}$. Dann gibt es eine oBdA offene Umgebung $O_x \in \mathcal{U}(x)$ mit $O_x \cap A = \emptyset$.

Weil $O_x \in \mathcal{U}(y)$ für jedes $y \in O_x$ ist, gilt $O_x \cap \overline{A} = \emptyset$ bzw. $O_x \subseteq X \setminus \overline{A}$ und weiters

$X \setminus \overline{A} = \bigcup\limits_{x \in X \setminus \overline{A}} O_x$. Dies bedeutet, dass $X \setminus \overline{A}$ offen ist bzw. dass $\overline{A}$ abgeschlossen ist.

Sei nun F eine abgeschlossene Menge mit $A \subseteq F$. Ist $x \notin F$, dann ist $X \setminus F$ eine offene Umgebung von x mit $(X \setminus F) \cap A = \emptyset$.

Also $x \notin \overline{A}$ und folglich $X \setminus F \subseteq X \setminus \overline{A}$ bzw. $\overline{A} \subseteq F$.

Damit ist $\overline{A}$ die kleinste A umfassende abgeschlossene Menge.

zu 3): $\mathrm{int}A \subseteq A \;\Rightarrow\; X \setminus A \subseteq X \setminus \mathrm{int}A$.

Weil $X \setminus \mathrm{int}A$ abgeschlossen ist, gilt $\overline{X \setminus A} \subseteq X \setminus \mathrm{int}A$.

$X \setminus A \subseteq \overline{X \setminus A} \;\Rightarrow\; X \setminus \overline{X \setminus A} \subseteq A$

Weil $X \setminus \overline{X \setminus A}$ offen ist, gilt $X \setminus \overline{X \setminus A} \subseteq \mathrm{int}A$.

Damit $X \setminus \mathrm{int}A \subseteq \overline{X \setminus A}$.

Die zweite Aussage wird analog gezeigt. $\square$

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum, und $A \subseteq X$.

A heißt **dicht** (bzw. dichte Teilmenge) in (X, τ) wenn $\overline{A} = X$.

(X, τ) heißt **separabel**, wenn es eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Beispiel. $\mathbb{R}^n$ mit der metrischen Topologie ist separabel, weil $\mathbb{Q}^n$ eine abzählbare dichte Teilmenge ist.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum, und $A \subseteq X$.

Die Menge $\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{int}A$ heißt der **Rand** von A .

Bemerkungen.

(1) Wegen $\partial A = \overline{A} \cap (X \setminus \mathrm{int}A)$ ist der Rand einer Menge stets

abgeschlossen.

(2) Sei τ die diskrete Topologie auf X und $A \subseteq X$.

Dann ist $\mathrm{int}A = A = \overline{A}$ und $\partial A = \emptyset$.

(3) Sei τ die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$ und $A = \mathbb{Q}$.

Dann ist $\mathrm{int}\mathbb{Q} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ und $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

$\mathcal{B} \subseteq \tau$ heißt eine **Basis** für τ wenn sich jede offene Menge als Vereinigung von Elementen von $\mathcal{B}$ darstellen lässt.

Bemerkung. $\mathcal{B}$ ist genau dann eine Basis wenn es für jede offene Menge O und $x \in O$ ein $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in B \subseteq O$.

Beispiele.

(1) Ist τ die diskrete Topologie auf X , dann ist $\mathcal{B} = \{\{x\} \ : \ x \in X\}$ eine Basis.

(2) Sei (X, d) ein metrischer Raum und τ_d die metrische Topologie. Dann ist $\mathcal{B} = \{K(x, \varepsilon) \ : \ x \in X \ , \ \varepsilon > 0\}$ eine Basis.

(3) Sei τ die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$. Dann bildet die Menge der offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten eine Basis, welche sogar abzählbar ist.

Jede Basis $\mathcal{B}$ eines Raumes (X, τ) hat folgende Eigenschaften:

(B1) $X = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$

(B2) $\forall \ B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ und $x \in B_1 \cap B_2$ existiert ein $B_3 \in \mathcal{B}$

mit $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Diese beiden Eigenschaften können nun verwendet werden, um Topologien auf Mengen zu konstruieren!

Satz. Sei X eine Menge (!) und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sodass (B1) und (B2) erfüllt sind.

Dann gibt es genau eine Topologie τ auf X sodass (im nachhinein) $\mathcal{B}$ eine Basis für (X, τ) ist.

Beweis.

Sei $O \in \tau$ genau dann wenn $O = \emptyset$ oder wenn es zu jedem $x \in O$ ein $B_x \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in B_x \subseteq O$.

Zur Übung: τ ist die gesuchte (eindeutig bestimmte) Topologie. $\square$

Beispiel. Sei $X = \mathbb{R}$ und $\mathcal{B} = \{\, [x, x+r) \ : \ x \in \mathbb{R} \ , \ r > 0\}$ die Menge der nach rechts halboffenen Intervalle.

Dann sind (B1) und (B2) erfüllt, und damit liefert $\mathcal{B}$ eine Topologie auf $\mathbb{R}$, die sogenannte **Sorgenfrey Topologie**.

Eigenschaften der Sorgenfrey Topologie:

(a) Die Basismengen $[x, x+r)$ sind sowohl offen als auch abgeschlossen in (X, τ) .

(b) $\tau_d \subseteq \tau$, $\tau_d \neq \tau$ (τ_d ... metrische Topologie auf $\mathbb{R}$)

(c) (X, τ) hat **keine** abzählbare Basis.

(d) (X, τ) ist separabel, weil $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Bemerkung. Es ist einfach zu sehen, dass ein Raum, welcher eine abzählbare Basis besitzt, separabel sein muss. Die Sorgenfrey Topologie zeigt, dass die Umkehrung dieser Aussage i.a. nicht gilt.

Definition. Sei (X, τ) ein topologischer Raum.

$\mathcal{S} \subseteq \tau$ heißt eine **Subbasis** für τ wenn die Familie $\mathcal{B}$ der endlichen Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$ eine Basis bildet.

Also $B \in \mathcal{B} \;\Leftrightarrow\; \exists\, S_1, S_2, \ldots, S_k \in \mathcal{S}$ mit $B = S_1 \cap S_2 \ldots \cap S_k$

Bemerkungen.

(a) Jede Basis ist zugleich auch eine Subbasis.

(b) $\mathcal{S} = \{\, (-\infty, b)\,,\, (a, \infty) \;:\; a, b \in \mathbb{R}\}$ ist eine Subbasis für die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$, aber keine Basis.

(c) **Jede** Subbasis für einen Raum (X, τ) besitzt die Eigenschaft

(SB) $\bigcup\limits_{S \in \mathcal{S}} S = X$

Wiederum kann die Eigenschaft (SB) verwendet werden, um Topologien auf Mengen zu konstruieren.

Satz. Sei X eine Menge (!) und $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit $\bigcup\limits_{S \in \mathcal{S}} S = X$.

Dann gibt es genau eine Topologie τ auf X sodass (im nachhinein) $\mathcal{S}$ eine Subbasis für (X, τ) ist.

Beweis. Die Familie der endlichen Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$ erfüllt (B1) und (B2) .

Das Ergebnis folgt dann aus dem vorherigen Satz. $\square$

Bemerkungen.

(a) Die von $\mathcal{S}$ erzeugte Topologie ist die gröbste Topologie, in der alle Mengen aus $\mathcal{S}$ offen sind.

(b) Der obige Satz wird beispielsweise verwendet, um die Produkttopologie zu definieren.

....

Konstruktion von Topologien mittels Abbildungen

Gegeben sei eine Menge (!) X , ein topologischer Raum (Y, σ) und eine

Abbildung $f : X \to Y$.

Wir suchen eine Topologie auf X wodurch (im nachhinein) die Abbildung f stetig wird. Klarerweise erfüllt die diskrete Topologie die Anforderungen, daher suchen wir nach gröberen Topologien.

Setze $\tau = \{O \subseteq X \ : \ O = f^{-1}(V) \ , \ V \in \sigma\}$.

Wir behaupten, dass τ die gröbste Topologie auf X ist mit der Eigenschaft, dass $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ stetig ist.

$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau \quad , \quad f^{-1}(Y) = X \in \tau$

Seien $O_1, O_2 \in \tau$, i.e. $O_1 = f^{-1}(V_1)$, $O_2 = f^{-1}(V_2)$ mit $V_1, V_2 \in \sigma$.

Dann ist $O_1 \cap O_2 = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) = f^{-1}(V_1 \cap V_2) \in \tau$.

Seien $O_i \in \tau$, $i \in I$, i.e. $O_i = f^{-1}(V_i)$ mit $V_i \in \sigma \quad \forall\, i$.

Dann ist $\bigcup\limits_{i \in I} O_i = \bigcup\limits_{i \in I} f^{-1}(V_i) = f^{-1}(\bigcup\limits_{i \in I} V_i) \in \tau$.

Damit ist τ eine Topologie auf X wodurch f stetig wird. Ist τ^* eine weitere Topologie auf X welche f stetig macht, dann gilt offenbar $\tau \subseteq \tau^*$.

Beispiel. (**Spurtopologie**)

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Sei weiters $j : A \to X$ die Inklusionsabbildung $j(a) = a \quad \forall\, a \in A$.

Dann ist $\tau|_A = \{j^{-1}(O) \ : \ O \subseteq X \ , \ O \in \tau\} = \{O \cap A \ : \ O \in \tau\}$ die sogenannte **Spurtopologie** auf A .

$(A, \tau|_A)$ heißt **Teilraum** von (X, τ) .

$U \subseteq A$ ist also offen in $(A, \tau|_A)$ genau dann, wenn U der Schnitt einer offenen Menge von (X, τ) mit A ist.

Man kann weiters zeigen:

(i) $C \subseteq A$ ist abgeschlossen in $(A, \tau|_A)$ genau dann, wenn C der Schnitt einer abgeschlossenen Menge von (X, τ) mit A ist.

(ii) Für $B \subseteq A$ ist $\overline{B}^A = \overline{B}^X \cap A$ wobei $\overline{B}^A$ die abgeschlossene Hülle von B bzgl. $(A, \tau|_A)$ ist, und $\overline{B}^X$ die abgeschlossene Hülle von B bzgl. (X, τ) ist.

(Für das Innere gilt keine entsprechende Aussage.)

Bemerkung. Sei $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ stetig und $A \subseteq X$.

Dann ist die Einschränkung $f|_A : A \to Y$ von f auf A stetig , weil $f|_A = f \circ j$.

Die ursprüngliche Konstruktion kann nun erweitert werden auf die Situation, dass X eine Menge ist und (Y_i, σ_i) , $i \in I$ eine Familie topologischer Räume und $f_i : X \to Y_i$ eine Abbildung für jedes $i \in I$.

Gemäß dem Vorhergehenden ist dann

$$\mathcal{S} = \{f_i^{-1}(V_i) \ : \ V_i \subseteq Y_i \ , \ V_i \in \sigma_i \ , \ i \in I\}$$

eine Subbasis für die gröbste Topologie τ auf X wodurch alle Abbildungen f_i stetig werden.

("$V_i \subseteq Y_i$" ist so aufzufassen, dass V_i alle offenen Mengen von Y_i durchläuft.)

τ heißt die **initiale Topologie** bzgl. der gegebenen Familie von Abbildungen.

Beispiel. (**Produkttopologie**)

Seien (X_i, τ_i) , $i \in I$ topologische Räume.

Die Produktmenge $X = \prod_{i \in I} X_i$ besteht aus allen Abbildungen

$$x : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \quad \text{mit} \quad x(i) \in X_i \quad \text{für jedes} \quad i \in I \ .$$

Man schreibt für $x \in X$ auch $x = (x_i)_{i \in I}$ wobei $x_i = x(i)$.

Für jedes $j \in I$ gibt es die **j-te Projektionsabbildung**

$$p_j : X \to X_j \quad \text{mit} \quad p_j(x) = x_j \ .$$

Gemäß vorher erhalten wir eine Subbasis

$$\mathcal{S} = \{p_j^{-1}(O_j) \ : \ O_j \subseteq X_j \ , \ O_j \in \tau_j \ , \ j \in I\}$$

für die gröbste Topologie auf $X = \prod_{i \in I} X_i$ wodurch alle Projektionsabbildungen stetig werden. τ heißt die **Produkttopologie** .

Eine Menge der kanonischen Basis für die Produkttopologie hat damit die Form

$$B = p_{i_1}^{-1}(O_{i_1}) \cap p_{i_2}^{-1}(O_{i_2}) \cap \ldots \cap p_{i_k}^{-1}(O_{i_k}) \quad \text{wobei}$$

$$O_{i_1} \in \tau_{i_1} \ , \ \ldots , \ O_{i_k} \in \tau_{i_k} \quad \text{und} \quad i_1, \ldots, i_k \in I \ .$$

Beispiel. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ sei $X_i = \mathbb{R}$ mit der natürlichen Topologie.

Die Produktmenge ist dann $X = \prod_{i \in I} X_i = \mathbb{R}^n$.

Eine typische Menge der Basis der Produkttopologie hat dann die Form

$$B = p_1^{-1}(O_1) \cap \ldots \cap p_n^{-1}(O_n) = O_1 \times \ldots \times O_n \quad \text{wobei}$$

$O_1, \ldots O_n$ offen in $\mathbb{R}$ sind.

Im analogen Fall sei (X, τ) ein topologischer Raum, Y eine Menge (!) und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

Wird Y mit der indiskreten Topologie versehen, dann wird f sicherlich stetig, daher suchen wir nach der feinsten Topologie auf Y sodass f stetig wird.

Man rechnet leicht nach, dass

$$\sigma = \{V \subseteq Y \ : \ f^{-1}(V) \in \tau\} \quad \text{die gesuchte Topologie auf } Y \text{ ist.}$$

Auch dies kann verallgemeinert werden: seien (X_i, τ_i) , $i \in I$, topologische Räume, Y eine Menge und $f_i : X_i \to Y$ Abbildungen.

Setzen wir $\sigma_i = \{V \subseteq Y \ : \ f^{-1}(V) \in \tau_i\}$ für jedes $i \in I$, dann ist

$\sigma = \bigcap\limits_{i \in I} \sigma_i$ die feinste Topologie auf Y sodass **alle** f_i stetig sind.

σ heißt auch die **finale Topologie** bzgl. der gegebenen Familie von Abbildungen.

Beispiel. (**Quotiententopologie**)

Sei (X, τ) ein topologischer Raum und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X .

Ist Y die Menge der Äquivalenzklassen, dann gibt es eine kanonische Abbildung $\pi : X \to Y$, wobei $\pi(x) = [x]$ ($[x]$ ist die Äquivalenzklasse, in der x liegt).

Die finale Topologie auf Y heißt dann **Quotiententopologie**.

Im besonderen sei etwa $X = \mathbb{R}$ mit der metrischen Topologie. Wir betrachten die Äquivalenzrelation $x \sim y \ \Leftrightarrow \ x - y \in \mathbb{Z}$.

Man kann dann zeigen, dass der Quotientenraum topologisch die Kreislinie ist.

. . . .

Homöomorphismen

Homöomorphismen sind die Isomorphismen in der Kategorie der topologischen Räume.

Definition. Seien (X, τ) und (Y, σ) topologische Räume.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **Homöomorphismus** wenn f bijekiv, stetig **und** die Umkehrabbildung f^{-1} stetig ist.

Satz. Für eine bijektive Abbildung $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ sind folgende Aussagen äquivalent :

1) f ist ein Homöomorphismus

2) f ist stetig und eine offene Abbildung (d.h. die Bilder offener Mengen in (X, τ) sind offen in (Y, σ))

3) f ist stetig und eine abgeschlossene Abbildung (d.h. die Bilder abgeschlossener Mengen in (X, τ) sind abgeschlossen in (Y, σ))

Die Bedeutung homöomorpher Räume liegt darin, dass sie topologisch "nicht unterscheidbar" sind.

Ein Homöomorphismus liefert nicht nur eine bijektive Entsprechung zwischen den Punkten der beiden Mengen, sondern auch eine bijektive Entsprechung zwischen den offenen Mengen. Jede topologische Eigenschaft (eine Eigenschaft, welche nur mittels offener Mengen definiert ist, wie etwa Umgebung, Kompaktheit, Zusammenhang etc.), die einem gegebenen Raum erfüllt ist, ist auch in jedem dazu homöomorphen Raum erfüllt.

So stellt sich beim Beispiel zur Quotiententopologie heraus, dass der Quotientenraum homöomorph zur Kreislinie ist, wodurch der an sich unanschauliche Quotientenraum eine anschauliche Realisation bekommt.