Modelltheorie (Einige Impulse)

Formale Systeme werden oft entworfen, um mathematische Strukturen zu beschreiben. In der Modelltheorie geht es um das Studium der Beziehungen zwischen formalen Systemen und den entsprechenden mathematischen Strukturen (Modellen).

Nicht jedes formale System ist geeignet, mathematische Strukturen zu beschreiben. In der Aussagenlogik etwa geht es lediglich darum, die Wahrheit bzw. logische Gültigkeit zusammengesetzter Aussagen zu beschreiben. Mittels der Logik 1. Ordnung ist es allerdings möglich, einen sehr großen Teil der Mathematik zu beschreiben.

Genauer: in der Modelltheorie 1. Ordnung geht es um die Beziehungen zwischen Mengen von Sätzen in einer Sprache 1. Ordnung und deren möglichen Modellen.

(Im folgenden arbeiten wir stets mit einer **abzählbaren** Sprache 1. Ordnung)

Zwei zentrale Fakten der Modelltheorie 1. Ordnung sind

Satz. (Kompaktheitssatz)

Wenn eine Menge Σ von Sätzen (in einer abzählbaren Sprache 1. Ordnung) die Eigenschaft besitzt, dass jede endliche Teilmenge von Σ ein Modell besitzt, dann hat auch Σ ein Modell.

Satz. (Löwenheim-Skolem)

Wenn eine Menge Σ von Sätzen (in einer abzählbaren Sprache 1. Ordnung) ein Modell besitzt, dann gibt es auch ein Modell, das höchstens abzählbar ist.

Beide Sätze haben zahlreiche Anwendungen. Aus dem Kompaktheitssatz folgt etwa, dass wenn eine Menge von Sätzen ein unendliches Modell besitzt, es dann dafür auch beliebig große Modelle gibt.

Satz. (Upward Löwenheim-Skolem)

Sei Σ eine Menge von Sätzen und X eine unendliche wohlgeordnete Menge. Wenn Σ ein unendliches Modell besitzt, dann hat Σ auch ein Modell M sodass es eine injektive Abbildung $X \to M$ gibt.

Bemerkung. Mit Hilfe des Begriffes der Kardinalität heisst das, dass es dann beliebig grosse Modelle gibt bzw. dass es unendlich viele verschiedene Modelle von Σ gibt.

Peano Arithmetik

Eine Menge Σ von Sätzen 1. Ordnung heisst **vollständig**, wenn für jeden Satz α entweder α oder $(\neg\alpha)$ eine logische Folgerung aus Σ ist.

(Im Unterschied dazu geht es beim Vollständigkeitssatz darum, wann ein formales System vollständig genannt wird).

Wenn Σ vollständig ist, dann kann für jedes α entweder α oder $(\neg\alpha)$ aus Σ hergeleitet werden.

Die **Theorie** einer Struktur M ist die Menge aller Sätze σ 1. Ordnung, welche in M gelten, i.e. für welche $M \models \sigma$ gilt. Die Theorie von M ist stets vollständig.

Bemerkung. Eine gegebene Menge Σ von Sätzen, welche ein unendliches Modell besitzt, hat mehr als ein Modell. Ist nun Σ vollständig, dann haben alle Modelle dieselbe Theorie (1. Ordnung).

Will man nun ein mathematisches Gebiet axiomatisieren, dann will man etwa im Fall der Gruppentheorie **nicht**, dass die Menge der Axiome vollständig ist, weil man viele unterschiedliche relevante Modelle will.

In anderen Zusammenhängen hingegen taucht der Wunsch nach einer vollständigen Menge von Sätzen auf, um das betrachtete Objekt so eindeutig wie möglich festzulegen. Dieses Interesse ist etwa im Falle der natürlichen Zahlen gegeben.

Zuvor wurden die natürlichen Zahlen als spezielle Mengen konstruiert (endliche Ordinalzahlen). Danach konnten Addition und Multiplikation erklärt werden. Bei einer Axiomatisierung der Mengenlehre taucht dann implizit eine Axiomatisierung der natürlichen Zahlen auf.

Kann nun $\mathbb{N}$ direkt, i.e. ohne Rückgriff auf die Mengenlehre, axiomatisiert werden?

Ein Axiomensystem dazu sollte widerspiegeln, in welcher Art und Weise die natürliche Zahlen erscheinen. Ausgehend von 0 kann jede Zahl erhalten werden durch endliche Anwendung der Nachfolgeroperation. Allerdings kann nicht von einer 'beliebigen endlichen Anzahl von Schritten' gesprochen werden, da es keine dementsprechende Formel in der Logik 1. Ordnung gibt.

Die verwendete Sprache enthält ein Konstantensymbol 0 und ein unäres Operationssymbol s (die Nachfolgerfunktion).

(P1) Jedes Element x außer 0 ist Nachfolger eines eindeutigen y .

(P2) 0 ist nicht Nachfolger von etwas.

Bemerkung. • Diese Aussagen können leicht als Sätze 1. Ordnung geschrieben werden, etwa (P2) als $(\forall x)(\neg(s(x) = 0))$.

• Bereits (P1) und (P2) allein haben unendlich viele unterschiedliche abzählbare Modelle.

Als nächstes werden Addition und Multiplikation (induktiv) definiert:

(P3) $(\forall x)(x + 0 = x)$

(P4) $(\forall x)(\forall y)(x + s(y) = s(x + y))$

(P5) $(\forall x)(x \cdot 0 = 0)$

(P6) $(\forall x)(\forall y)(x \cdot s(y) = x \cdot y + x)$

Schließlich ist das Prinzip der Induktion ein Axiomenschema für jede Formel ϕ mit nur einer freien Variablen x :

(P7) $((\phi[0/x] \wedge (\forall x)(\phi \rightarrow \phi[s(x)/x])) \rightarrow (\forall x)\phi)$

Dieses System heißt **Peano Arithmetik** . Es hat außer $\mathbb{N}$ noch andere Modelle (sog. Nichtstandardmodelle).

(Man fügt zur Sprache ein neues Konstantensymbol c hinzu. Nun sei σ_n der Satz $(c > n)$ wobei n die Kurzfassung von $s(s(\ldots s(0)\ldots))$ ist.

Sei $\Sigma = \{\sigma_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$.

Dann ist jede endliche Teilmenge Σ_0 von Σ erfüllbar, weil c als eine natürliche Zahl grösser als der grösste Index einer Formel in Σ_0 interpretiert werden kann. Mit dem Kompaktheitssatz gibt es dann ein Modell der Peano Axiome, in dem Σ erfüllt ist. In diesem Modell ist dann c eine 'unendliche Zahl'.)

Die zentrale Frage ist nun: Ist die Peano Arithmetik vollständig?

Gödel beantwortete 1930 diese Frage mit 'Nein'. Damit ist es nicht möglich, alle wahren Aussagen über $\mathbb{N}$ mittels formaler Methoden zu beweisen. Das heisst, es gibt (zumindest) einen Satz σ , der wahr in $\mathbb{N}$ ist, aber aus den Peano Axiomen nicht bewiesen werden kann.

Die Idee dahinter ist, Formeln durch natürliche Zahlen zu kodieren (Gödel-Nummerierung). Dadurch erhalten Formeln und im weiteren auch endliche Folgen von Formeln (wie etwa Beweise) eine Gödel-Nummer.

Satz. (Gödelscher Unvollständigkeitssatz)

Wenn die Peano Arithmetik konsistent ist, dann gibt es einen Satz der weder beweisbar noch widerlegbar in der Peano Arithmetik ist.

(Der Satz, um den es geht, behauptet seine eigene Unbeweisbarkeit. Es gibt keine natürliche Zahl, welche die Gödel-Nummer eines Beweises des Satzes ist. In $\mathbb{N}$ ist dies wahr. Also gibt es einen Satz, der wahr in $\mathbb{N}$ ist, aber nicht beweisbar in der Peano Arithmetik (Tarski)).

Bemerkung. In weiterer Folge kann damit gezeigt werden, dass dieselbe

Art von Unvollständigkeit in jedem formalen System auftaucht, wo die Nachfolgeroperation, Addition und Multiplikation von natürlichen Zahlen dargestellt werden können.

Bemerkung. Wird der Satz in Gödels Beweis als neues Axiom für die Arithmetik hinzugenommen, dann ist die neue Menge von Axiomen ebenfalls konsistent (weil der Satz wahr in $\mathbb{N}$ ist). Allerdings ergibt sich dann ein neuer Satz, der wahr ist aber nicht von den neuen Axiomen bewiesen werden kann.

Bemerkung. $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$, die Menge aller Sätze, welche wahr in $\mathbb{N}$ sind, kann nicht als Axiomensystemen verwendet werden (es ist vollständig und jeder wahre Satz hat einen einzeiligen Beweis). Der Grund ist, dass dieses Axiomensystem nicht 'mechanisch erkennbar' ist. Also können alle wahren Sätze über die natürlichen Zahlen nicht 'mechanisch erkannt' werden.

Konsistenz.

Der Wunsch Hilberts war es, um Widersprüche in den Grundlagen der Mathematik auszuschliessen, einen **formalen** Beweis für die Konsistenz zu finden. Ein derartiger Beweis würde lediglich endliches mechanisches Schliessen beinhalten. Letztendlich ist es dabei um die Frage gegangen, ob konsistente Axiome für die natürlichen Zahlen gefunden werden können.

Σ ist konsistent, wenn daraus kein Widerspruch hergeleitet werden kann. Im allgemeinen ist es nicht möglich, **innerhalb** des formalen Systems zu beweisen, dass Σ konsistent ist. Wir müssen uns dazu ausserhalb des formalen Systems begeben und den Korrektheits- und Vollständigkeitssatz anwenden (Σ ist konsistent wenn es dafür ein Modell gibt).

Mittels der Gödel-Nummerierung ist es möglich, einen Satz anzugeben, welcher die Konsistenz des formalen Systems behauptet.

Satz. (2. Unvollständigkeitssatz von Gödel)

Wenn die Peano Arithmetik konsistent ist, dann ist die Formel, welche diese Konsistenz behauptet, nicht beweisbar.

Bemerkung. Das heisst also, dass wir nicht sicher sein können, dass niemals ein Beweis von $0 = 1$ innerhalb der Peano Arithmetik gefunden werden kann.

Bemerkung. Obiger Satz kann erweitert werden zu: jedes konsistente formale System, in dem die Theorie von Nachfolger, Addition und Multiplikation in $\mathbb{N}$ formuliert werden kann, kann seine eigene Konsistenz nicht beweisen.

Bemerkung. Die natürlichen Zahlen können innerhalb der Mengenlehre konstruiert werden (wo dann die Peano Axiome erfüllt sind). Die Axiome von Zermelo-Fraenkel für die Mengenlehre sind dann ausreichend, um die (relative) Konsistenz der Peano Axiome nachzuweisen.