# Kardinalzahlen

Kardinalzahlen sollen die "Größe" von Mengen messen, daher suchen wir eine Aussage der Form, dass jede Menge bijektiv auf eine Kardinalzahl abgebildet werden kann. Um eine brauchbare Theorie von Kardinahlzahlen zu entwickeln, wird allerdings das Auswahlaxiom benötigt.

Daher arbeiten wir im folgenden mit (ZFC).

**Definition.** Eine **Kardinalzahl** ist eine Ordinalzahl $\alpha$ mit der Eigenschaft dass es keine Bijektion zwischen $\alpha$ und einem Abschnitt von $\alpha$ gibt. (Aus diesem Grund nennt man Kardinalzahlen auch Anfangsordinalzahlen.)

**Bemerkung.** Alle endlichen Ordinahlzahlen (i.e. alle natürlichen Zahlen) sind Kardinalzahlen. $\omega$ ist eine Kardinalzahl, weil $\omega$ unendlich ist und alle Abschnitte endlich sind. $\omega + 1$ ist keine Kardinalzahl, weil abzählbar (und somit gibt es eine Bijektion zwischen $\omega$ und $\omega + 1$ .)

**Bemerkung.** Eine unendliche Kardinalzahl $\alpha$ muss eine Limesordinalzahl sein. (Beweis zur Übung)

**Satz.** Für jede Menge $X$ existiert eine Bijektion zwischen $X$ und einer eindeutig bestimmten Kardinalzahl.

**Beweis.** Da $X$ wohlgeordnet werden kann, existiert eine Bijektion zwischen $X$ und einer Ordinalzahl. Die Menge aller Ordinahlzahlen, welche bijektiv zu $X$ sind, hat ein kleinstes Element $\alpha$ .

Behauptung: $\alpha$ ist eine Kardinalzahl.

Würde es eine Bijektion zwischen $\alpha$ und einem Abschnitt $\beta$ geben, dann gäbe es eine Bijektion zwischen $X$ und $\beta$ , ein Widerspruch (weil $\beta < \alpha$).

Würde es eine Bijektion zwischen $X$ und zwei verschiedenen Kardinalzahlen $\alpha, \beta$ mit $\beta < \alpha$ geben, dann wäre $X$ bijektiv zu $\alpha$ und einem Abschnitt zu $\alpha$ , ein Widerspruch. QED

**Bemerkung.** Die eindeutig bestimmte Kardinalzahl zu einer Menge $X$ wird mit $|X|$ bezeichnet. Offenbar gilt $|\alpha| = \alpha$ , wenn $\alpha$ eine Kardinalzahl ist. Ist $f : X \to Y$ eine Bijektion zwischen $X$ und $Y$ , dann gilt $|X| = |Y|$ .

Für unendliche Kardinalzahlen hat Cantor die "Aleph Notation" eingeführt. Diese ergibt sich durch eine "Abbildung" von den Ordinalzahlen in die Kardinalzahlen, welche rekursiv definiert ist.

(i) $\aleph_0 = \omega$

(ii) $\aleph_{s(\alpha)} = \aleph_{\alpha+1}$ ist die kleinste Kardinalzahl grösser als $\aleph_\alpha$

(iii) $\aleph_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \aleph_\beta$ wenn $\lambda$ Limesordinalzahl ist.

**Behauptung**: $\aleph_\lambda$ ist tatsächlich eine Kardinalzahl.

Klarerweise ist $\aleph_\lambda$ eine Ordinalzahl (nämlich das Supremum der Ordinalzahlen $\aleph_\beta$). Annahme: es gibt eine Bijektion zwischen $\aleph_\lambda$ und einem Abschnitt $\mu$ (von $\aleph_\lambda$ ). Dann gibt es ein $\beta$ mit $\mu < \aleph_\beta < \aleph_{\beta+1} < \aleph_\lambda$ (die Ordnung hier ist die Ordnung bei Ordinalzahlen). Mit dem Satz von Schröder-Bernstein wäre dann $\aleph_\beta = \aleph_{\beta+1}$ , ein Widerspruch.

**Bemerkung.** Somit haben wir zwei Notationen für die Ordinalzahl, welche die natürlichen Zahlen beschreibt, nämlich $\omega$ und $\aleph_0$ . Wir verwenden die erste, wenn es um das Rechnen mit Ordinalzahlen geht, und die zweite, wenn es um das Rechnen mit Kardinalzahlen geht.

Des weiteren ist $\aleph_1$ die kleinste überabzählbare Ordinalzahl.

**Bemerkung.** Weil Kardinalzahlen auch Ordinalzahlen sind, gibt es auch eine Ordnungsrelation (nämlich jene von Ordinalzahlen).

Seien $\alpha, \beta$ Kardinalzahlen. Ist $\alpha \leq \beta$ dann ist $\alpha \subseteq \beta$ und damit gibt es eine injektive Abbildung $\alpha \to \beta$ . Sei umgekehrt $f : \alpha \to \beta$ eine injektive Abbildung. Wäre $\beta < \alpha$ , dann würde es eine injektive Abbildung $\beta \to \alpha$ und damit eine bijektive Abbildung $\alpha \to \beta$ geben. Folglich $\alpha = |\alpha| = |\beta| = \beta$ (wegen Bemerkung vorher), ein Widerspruch. Damit $\alpha \leq \beta$ .

Dies lässt sich ausdrücken als: $|X| \leq |Y|$ genau dann wenn es eine injektive Abbildung $X \to Y$ gibt.

**Rechenoperationen mit Kardinalzahlen.**

Für Kardinalzahlen können nun Addition, Multiplikation und Exponentiation definiert werden.

Seien $\alpha, \beta$ Kardinalzahlen.

(i) $\alpha + \beta = |(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})|$

(ii) $\alpha \cdot \beta = |\alpha \times \beta|$

(iii) $\alpha^\beta = |\{f : \beta \to \alpha\}|$

**Bemerkung.** Seien $A, B$ Mengen. Die Menge aller Funktionen $B \to A$ wird oft mit $A^B$ (oder ${}^B A$ ) bezeichnet.

Obige Definition lässt sich nun auch als Aussage über die Kardinalität von Mengen schreiben.

(i) $|A \cup B| = |A| + |B|$ wenn $A, B$ disjunkt sind.

(ii) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

(iii) $|A^B| = |A|^{|B|}$

**Satz.** Seien $\alpha, \beta$ Kardinalzahlen $\neq 0$ , von denen zumindest eine unendlich ist. Dann gilt

$$\alpha + \beta = \alpha \cdot \beta = \max\{\alpha, \beta\}$$

**Beweis.**

**Bemerkung.** Es genügt zu zeigen, dass $\alpha \cdot \alpha = \alpha$ gilt für jede unendliche Kardinalzahl $\alpha$ .

(Ist dann nämlich $\beta \leq \alpha$ , dann existiert offenbar eine Injektion $\alpha \times \beta \to \alpha \times \alpha$ , und weiters eine Injektion $(\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\}) \to (\alpha \times \{0\}) \cup (\alpha \times \{1\}) = \alpha \times 2$ , wobei $2 = \{0, 1\}$ .

Folglich ist $\alpha \cdot \beta \leq \alpha \cdot \alpha$ und $\alpha + \beta \leq \alpha \cdot \alpha$ .

Andererseits ist offenbar $\alpha \leq \alpha + \beta$ und $\alpha \leq \alpha \cdot \beta$ (falls $\beta \neq 0$) . )

Wir zeigen nun also, dass $\alpha \cdot \alpha = \alpha$ ($\alpha$ unendlich), und nehmen an, dass diese Aussage falsch ist. Dann gibt es eine kleinste Kardinalzahl $\alpha$ sodass $\alpha \cdot \alpha > \alpha$ .

Sei $P = \alpha \times \alpha$ . Man beachte, dass $\alpha$ eine Ordinahlzahl (und damit eine Menge von Ordinalzahlen) ist. Im folgenden bedeutet "$+$" die Addition von Ordinalzahlen.

Für eine Ordinalzahl $\beta < \alpha$ sei $P_\beta = \{(x,y) \in P \ : \ x + y = \beta\}$ .

Die Mengen $P_\beta$ , $\beta < \alpha$ sind offenbar paarweise disjunkt. Seien $x, y < \alpha$ . Dann ist $|x| < \alpha$ und $|y| < \alpha$ .

Die Ordinalzahl $x + y$ hat Kardinalität $|x| + |y| = \max\{|x|, |y|\} < \alpha$ , weil der Satz für Kardinalzahlen $< \alpha$ gilt. Damit ist $x + y < \alpha$ .

Folglich bilden die Mengen $P_\beta$ , $\beta < \alpha$ eine Partition von $P$ .

Nun kann jeder "Diagonalstreifen" $P_\beta$ lexikographisch wohlgeordnet werden durch

$$(x,y) < (x',y') \text{ wenn entweder } x < x' \text{ , oder } x = x', y < y'$$

Damit kann nun ganz $P$ wohlgeordnet werden mittels $(x,y) < (x',y')$ falls entweder $(x,y) \in P_\beta$ , $(x',y') \in P_\gamma$ mit $\beta < \gamma$ , oder, wenn beide in $P_\beta$ liegen, mit der zuvor definierten Ordnung.

Sei $\theta$ die eindeutig bestimmte Ordinalzahl isomorph zu $P$ . Weil laut Annahme $|P| > \alpha$ , ist $\theta > \alpha$ . Damit gibt es ein Element $(u,v) \in P$ , sodass der dadurch definierte Abschnitt isomorph zu $\alpha$ ist.

Sei $(u,v) \in P_\beta$ , i.e. $u + v = \beta$ . Dann gilt für alle $(x,y) \in P$ mit $(x,y) < (u,v)$ dass $x + y \leq \beta$ . Damit ist dieser gesamte Abschnitt enthalten in $s(\beta) \times s(\beta)$ .

Damit $|s(\beta) \times s(\beta)| \geq \alpha$ . Weil $|\beta| < \alpha$ , ist auch $|s(\beta)| < \alpha$ , und weil der Satz für Kardinalzahlen $< \alpha$ gilt, erhalten wir $|s(\beta) \times s(\beta)| < \alpha$ , ein Widerspruch. QED.

**Folgerung.** Die Vereinigung von höchstens $\alpha$ Mengen, von denen jede höchstens die Kardinalität $\alpha$ hat, hat Kardinalität höchstens $\alpha$ .

**Satz.** (a) $|\mathcal{P}X| = 2^{|X|}$ für jede Menge $X$ ,

(b) $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ .

**Beweis.** (a) ergibt sich daraus, dass es eine bijektive Entsprechung zwischen den Teilmengen von $X$ und den charakteristischen Funktionen auf $X$ gibt.

zu (b) : $\mathbb{R}$ ist bijektiv zum offenen Intervall $(0,1)$ (siehe Analysis). $2^{\mathbb{N}}$ kann als Menge aller Folgen bestehend aus Nullen und Einsen betrachtet werden. Betrachten wir eine derartige Folge als Dezimalentwicklung eines Elements von $(0,1)$ , dann erhalten wir eine Injektion $2^{\mathbb{N}} \to (0,1)$ . Eine weitere Injektion $(0,1) \to 2^{\mathbb{N}}$ erhalten wir, wenn wir zu jeder Zahl aus $(0,1)$ die Entwicklung zur Basis 2 betrachten (liegt eine rationale Zahl vor, deren Nenner eine Potenz von 2 ist, dann endet die Entwicklung mit unendlich vielen Nullen und nicht mit unendlich vielen Einsen). Mit dem Satz von Schröder-Bernstein stimmen die Kardinalitäten überein. QED.

**Bemerkung.** Der Satz von Cantor kann damit geschrieben werden in der Form $2^\alpha > \alpha$ für jede Kardinalzahl $\alpha$ .

**Bemerkung.** Für die Kardinalarithmetik gelten auch einige Rechenregeln wie z.B. $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\cdot\gamma}$ .

**Satz.** Seien $\alpha, \beta$ Kardinalzahlen, wobei $\alpha$ unendlich ist, und gelte $2 \le \beta \le 2^\alpha$ . Dann gilt $\beta^\alpha = 2^\alpha$ .

**Beweis.** Dies folgt aus der Ungleichung

$$2^\alpha \le \beta^\alpha \le (2^\alpha)^\alpha = 2^{\alpha\cdot\alpha} = 2^\alpha .$$

**Unerreichbarkeit.**

Eine Kardinalzahl $\alpha$ heisst **unerreichbar** wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) $\alpha > \aleph_0$ ,

(b) für $\lambda < \alpha$ gilt $2^\lambda < \alpha$ ,

(c) die Vereinigung von weniger als $\alpha$ Ordinalzahlen, von denen jede kleiner als $\alpha$ ist, ist kleiner als $\alpha$ .

**Bemerkung.** Obige Definition erinnert in gewisser Weise an den "Sprung" von 'endlich' zu 'unendlich'. $\aleph_0$ erfüllt (b) und (c) (aber natürlich nicht (a)) . $\aleph_1$ erfüllt (a) und (c) , aber nicht (b) , weil $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$ nach dem Satz von Cantor.

Mittels transfiniter Rekursion kann nun eine Folge $(\beth_\alpha)$ definiert werden durch $(\beth =$"beth")

- $\beth_0 = \aleph_0$
- $\beth_{s(\alpha)} = 2^{\beth_\alpha}$
- $\beth_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha$ , falls $\lambda$ Limesordinalzahl ist.

**Bemerkung.** Dann ist die **verallgemeinerte Kontinuumshypothese** die Behauptung dass $\aleph_\alpha = \beth_\alpha$ für alle Ordinalzahlen $\alpha$ .

Unerreichbare Kardinalzahlen erhalten ihre Bedeutung dadurch, dass sie Modelle für ZFC liefern. (Zur Erinnerung: $V_\alpha$ ist die Menge jener Mengen, welche an der Stufe $\alpha$ der Zermelo-Hierarchie von Mengen vorliegen).

**Satz.** (a) Ist $\alpha$ eine Limesordinalzahl, dann erfüllt $V_\alpha$ alle Zermelo-Fraenkel Axiome ausser möglicherweise das Ersetzungsaxiom.

(b) Ist $\alpha$ eine unerreichbare Kardinalzahl, dann erfüllt $V_\alpha$ alle Zermelo-Fraenkel Axiome.

**Beweis.** zu (a) : es sind jene Axiome zu überprüfen, welche neue Mengen aus alten generieren, sodass die Mengen, welche von Mengen aus $V_\alpha$ erzeugt werden, wieder in $V_\alpha$ liegen. Wir untersuchen dies beispielhaft am Potenzmengenaxiom.

Wenn $x$ an der Stufe $\beta$ erscheint, dann erscheint $\mathcal{P}x$ an der Stufe $s(\beta)$ . Wegen $\beta < \alpha$ ist auch $s(\beta) < \alpha$ .

zu (b) : Sei $\phi$ eine Formel, welche in $V_\alpha$ eine 'Funktion definiert', d.h. wenn $\phi(x, y_1)$ und $\phi(x, y_2)$ erfüllt sind für $x, y_1, y_2 \in V_\alpha$ , dann gilt

$y_1 = y_2$ .

Sei nun $x$ eine Menge aus $V_\alpha$ und $y = \{F(u) \ : \ u \in x\}$ , wobei $F$ die durch $\phi$ definierte Funktion ist. Jedes $u \in x$ erscheint an einer Stufe vor der Stufe $\alpha$ und ebenso $F(u)$ . Die Kardinalität von $x$ erscheint ebenso an einer Stufe vor $\alpha$ . Die Unerreichbarkeit von $\alpha$ zeigt nun, dass die Vereinigung aller Stufen, an denen Elemente $F(u)$ $(u \in x)$ erscheinen, ebenso echt kleiner als $\alpha$ ist, und damit erscheint $y$ vor der Stufe $\alpha$ .

**Folgerung.** Die Aussage "Eine unerreichbare Kardinalzahl existiert" ist innerhalb von ZFC nicht beweisbar.

(Ansonsten wäre $V_\alpha$ ein Modell für ZFC, und damit wäre ZFC konsistent. Nach dem zweiten Gödelschen Unvollständigkeitssatz kann allerdings die Konsistenz von ZFC nicht aus deren Axiomen bewiesen werden).

Die Menge $V_\alpha$ (für $\alpha$ unerreichbar) ist ein Beispiel für ein sogenanntes $\in$-Modell, wo die Enthaltensein-Relation die Einschränkung der üblichen Enthaltensein-Relation $\in$ auf den 'Domain' des Modells ist.

Wann unterstützt nun eine nichtleere Menge $V$ ein $\in$-Modell?

Dazu muss $V$ eine **transitive Menge** sein, d.h. aus $x \in V$ und $y \in x$ folgt dass $y \in V$ . Weiters muss gelten

- $\omega \in V$ ,
- wenn $x, y \in V$ , dann $\{x, y\} \in V$ ,
- die Potenzmenge und die Vereinigung von Mengen aus $V$ liegt in $V$ ,
- das Bild eines Elementes von $V$ unter einer Funktion, welche durch eine Formel 1. Ordnung definiert ist, liegt wieder in $V$ .

**Bemerkung.** Bei der Definition einer unerreichbaren Kardinalzahl kann Eigenschaft (c) noch anders ausgedrückt werden. Die **Cofinalität** einer Kardinalzahl $\alpha$ ist die kleinste Kardinalzahl $\kappa$ sodass $\alpha$ die Vereinigung von $\kappa$ echt kleineren (als $\alpha$) Kardinalzahlen ist. Allgemeiner liegt eine Teilmenge einer Ordinalzahl $\alpha$ **cofinal** in $\alpha$ wenn ihre Vereinigung gleich $\alpha$ ist. Die Cofinalität von $\alpha$, geschrieben als $cf(\alpha)$ , ist dann die kleinste Kardinalzahl einer cofinalen Teilmenge.

Offenbar ist stets $cf(\alpha) \leq \alpha$ . $\alpha$ heisst **regulär** wenn $cf(\alpha) = \alpha$ , ansonsten **singulär** .

**Beispiel.** $\aleph_n$ ist stets regulär für jede natürliche Zahl $n$ , allerdings ist $\aleph_\omega$ singulär (es gilt $cf(\aleph_\omega) = \omega$).

Allgemeiner gilt

**Satz.** (a) Wenn $\alpha$ Nachfolgerordinalzahl ist, dann ist $\aleph_\alpha$ regulär.

(b) $cf(\aleph_\lambda) = cf(\lambda)$ für jede Limesordinalzahl. (Allerdings braucht $\aleph_\lambda$ deswegen nicht singulär zu sein. Es könnte möglich sein, dass $\aleph_\lambda = \lambda = cf(\lambda)$ .)

**Schlussbemerkung.** Das Mysterium in der Kardinalzahlarithmetik liegt in der Funktion $\alpha \to 2^\alpha$ bzw. in der Frage, wieviele Kardinalzahlen zwischen $\alpha$ und $2^\alpha$ liegen. Die verallgemeinerte Kontinuumshypothese ist die Aussage, dass zwischen $\alpha$ und $2^\alpha$ keine weiteren Kardinalzahlen liegen.

Die (eigentliche) **Kontinuumshypothese** (CH) ist die Aussage, dass $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ , d.h. dass eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ entweder endlich, abzählbar oder gleichmächtig wie $\mathbb{R}$ ist. Gödel zeigte bereits früh, dass sie innerhalb von ZFC nicht widerlegt werden kann. Mittels der Methode des **Forcing** gelang es P. Cohen in den 60er Jahren zu zeigen, dass die Kontinuumshypothese in ZFC auch nicht bewiesen werden kann (Cohen konstruierte ein Modell von ZFC, in dem $2^{\aleph_0} = \aleph_2$ ist). Damit ist die Kontinuumshypothese (wie auch die verallgemeinerte Kontinuumshypothese) unabhängig von ZFC, und folglich sind die Antworten vieler Fragen auch davon abhängig davon, welche Zusatzannahmen getroffen werden.

Gilt ($\neg$CH), dann kann es "viele" Kardinalzahlen zwischen $\aleph_0$ und $2^{\aleph_0}$ geben. Das vielleicht wichtigste Zusatzaxiom, mit dem dann oft gearbeitet wird, ist **Martin's Axiom** .

Des weiteren wird in der Mengenlehre auch mit stärkeren (als (CH)) Zusatzaxiomen gearbeitet, die zumeist kombinatorischer Natur sind. Ein Beispiel dafür wäre das Axiom $\diamondsuit$ (**Diamond**) .