Naive Mengenlehre

Im Wörterbuch kann man unter dem Begriff **"Menge"** etwa die folgenden Bestimmungen finden :

Ansammlung, Konglomerat, Haufen, Klasse, Quantität, Bündel,... usf.

Die Mengenlehre ist der (gegenwärtig) fundamentalste Teil der Mathematik. Fast jedes mathematische Objekt (wie z.B. Gruppe, Vektorraum, topologischer Raum) wird definiert als eine Menge mit einer zusätzlichen Struktur (Operationen, Relationen, ausgezeichnete Teilmengen etc.). Diese Operationen und Relationen sind selbst wieder spezielle Mengen.

ABER: Was ist eine Menge?

Der Begriff Menge geht auf **Bernard Bolzano** und **Georg Cantor** zurück. In Bolzanos Manuskripten aus den Jahren zwischen 1830 bis 1848 heißt es etwa:

"Inbegriffe nun, bey welchen auf die Art, wie ihre Theile mit einander verbunden sind, gar nicht geachtet werden soll, an denen somit Alles, was wir an ihnen unterscheiden, bestimmt ist, sobald nur ihre Theile [selbst] bestimmt sind, verdienen es eben um dieser Beschaffenheit willen, mit einem eigenen Nahmen bezeichnet zu werden. In Ermangelung eines andern tauglichen Wortes erlaube ich mir das Wort Menge zu diesem Zwecke zu brauchen".

Cantor beschrieb eine Menge "naiv" als eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. Die Objekte der Menge heißen Elemente der Menge. Weder der Begriff "Menge" noch der Begriff "Element" werden dabei im mathematischen Sinn definiert.

Eine Veranschaulichung des Mengenbegriffs, die auf **Richard Dedekind** zurückgeht, ist das Bild eines Sackes, der gewisse (als einzelne abgrenzbare) Dinge enthält. Nützlich ist diese Vorstellung zum Beispiel für die leere Menge: ein leerer Sack. Die leere Menge ist also nicht "nichts", sondern der Inhalt eines Behältnisses, das keine der für es als Inhalt vorgesehenen

Dinge enthält. Das "Behältnis" selbst verweist nur auf die bestimmte zu zählende Sorte und Art von Elementen. Diese Vorstellung hat aber ihre Grenzen. Ein Behältnis bleibt nämlich dasselbe, auch wenn man seinen Inhalt ändert. Dies ist bei Mengen anders: diese ändern ihre Identität, wenn man neue Elemente hinzufügt oder bestehende entfernt. Insofern ist es besser, wenn man sich die Menge als "Inhalt eines Behältnisses" vorstellt.

Allerdings: Werden beliebige (!) Zusammenfassungen als Mengen zugelassen, führt dies zum bekannten **Russell'schen Paradox**:

Sei S die Menge all jener Mengen, welche sich selbst nicht als Element enthalten. Ist S ein Element von S ?

Also $S = \{A \ : \ A \notin A\}$. Gilt $S \in S$?

Ähnliche Paradoxa treten im Bereich der **Selbstreferenzialität** auf.

1. Lügner Paradox

"Dieser Satz ist falsch." Die Paradoxie dieses Satzes besteht darin, dass sich nicht vernünftigerweise behaupten lässt, er sei wahr oder falsch. Angenommen er wäre falsch: Dann würde das zutreffen, was der Satz selbst behauptet, und er müsste also wahr sein. Nehmen wir aber an, er sei wahr, dann trifft das, was der Satz behauptet, nicht zu, was bedeutet, dass er falsch ist.

Oder: *Pinocchios Nase wächst bekanntlich genau dann, wenn er lügt. Was passiert aber, wenn er sagt "Meine Nase wächst gerade"?*

Im Paradoxon des Epimenides wird der Satz *"Alle Kreter sind Lügner."* verwendet, um die Paradoxie darzustellen. Dieser Satz wird von Epimenides, der selbst Kreter ist, behauptet. Dies ist aber kein Paradox im vollen Wortsinne, da aus der Negation des Satzes, also aus "Manche Kreter sind keine Lügner", nicht notwendigerweise folgt, dass Epimenides die Wahrheit sagt.

2. Autologisch - heterologisch

Ein Adjektiv heißt autologisch, wenn es sich selbst beschreibt, und heterologisch, wenn es sich selbst nicht beschreibt.

So sind etwa 'kurz' und 'dreisilbig' autologisch, während 'lang' und 'viersilbig' heterologisch sind.

Frage: *Ist 'heterologisch' heterologisch?*

3. Wohlfundierte Spiele

Wir betrachten Spiele folgender Art zwischen 2 Spielern. Es gibt Spielregeln, wer jeweils am Zug ist und welche Züge erlaubt sind. Ein Spiel ist zu Ende, wenn kein Zug mehr möglich ist, oder wenn gemäß der Spielregeln ein Remis entstanden ist.

Ein derartiges Spiel heißt **wohlfundiert** wenn es stets nach endlich vielen Zügen endet.

(Zum Beispiel: Spieler 1 wählt eine natürliche Zahl, und dann wird abwechselnd eine kleinere natürliche Zahl gewählt.)

Im **Hyperspiel** wählt zuerst Spieler 1 ein wohlfundiertes Spiel, Spieler 2 macht den ersten Zug im gewählten Spiel und dieses wird dann gespielt.

Frage: *Ist das Hyperspiel wohlfundiert?*

Ja, weil im ersten Zug ein wohlfundiertes Spiel gewählt wird und dieses nach endlich vielen Zügen endet.

Allerdings kann nun Spieler 1 das Hyperspiel wählen, Spieler 2 startet das Hyperspiel und wählt als wohlfundiertes Spiel ebenfalls das Hyperspiel etc. etc. Damit wird kein Ende nach endlich vielen Zügen erreicht, also ist das Hyperspiel nicht wohlfundiert.

Wegen dieser Paradoxa ist also Vorsicht bei der Zugrundelegung der (einer) Mengenlehre angebracht.

Ein Ausweg ist, die Mengenlehre axiomatisch als formales System zu entwickeln. Allerdings treten auch hier Probleme auf durch den 2. Unvollständigkeitssatz von Gödel, der besagt, dass jede formale Theorie, welche die natürlichen Zahlen mit ihrer üblichen Arithmetik beschreiben kann, ihre eigene Widerspruchsfreiheit nicht beweisen kann.

Damit ist prinzipiell ein Widerspruch im formalen System möglich. Man kann diese Möglichkeit einfach ignorieren und "hoffen", dass niemals ein Widerspruch auftaucht, oder Aussagen über die relative Widerspruchsfreiheit beweisen, d.h. dass ein formales System widerspruchsfrei ist unter der Annahme, dass ein anderes System widerspruchsfrei ist (dies geschieht etwa im Fall der Konstruktion von nicht-euklidischen Geometrien innerhalb der euklidischen Geometrie).

. . . .

Im folgenden wählen wir den sogenannten "naiven" Zugang und betrachten eine Menge als eine Zusammenfassung von Objekten, den Elementen der Menge.

Man schreibt $x \in S$ für den Fall, dass x ein Element von S ist.

Allerdings sind nicht alle Zusammenfassungen Mengen!

Insbesondere: Es gibt keine Menge S mit der Eigenschaft dass $x \in S$ genau dann wenn $x \notin x$.

(Würde eine derartige Menge S existieren, dann $S \in S \Leftrightarrow S \notin S$, ein Widerspruch!)

Bemerkung. "$\in$" ist die sogenannte **Enthaltensein-Relation** und "$\notin$" das logische Gegenteil.

(Im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre ist dies eine undefinierte Relation.)

Eine Zusammenfassung, die keine Elemente besitzt, ist eine Menge, nämlich die **leere Menge**.

Nun kann die **Gleichheit von Mengen** von Mengen definiert werden mittels des **Ausdehnungsprinzips** (Leibniz): Zwei Mengen sind gleich, wenn sie dieselben Elemente haben.

$$x = y \quad \text{genau dann wenn gilt} \quad (z \in x) \Leftrightarrow (z \in y)$$

Damit kann nun gezeigt werden, dass es **nur eine** leere Menge gibt, die mit $\emptyset$ bezeichnet wird.

Beweis. Seien e_1 und e_2 leere Mengen. Dann sind für alle z die Aussagen $z \in e_1$ und $z \in e_2$ falsch, also sind diese Aussagen logisch äquivalent, und mittels des Ausdehnungsprinzips gilt $e_1 = e_2$. $\square$

Wir akzeptieren weiters die **Doktrin**

Alle betrachteten Objekte sind selbst Mengen.

Bemerkung. Es gibt auch andere Zugrundelegungen der Mengenlehre, welche sogenannte *Urelemente* zulassen, das sind fundamentale Objekte, die keine Mengen sind.

Wir können nun die vertrauten Begriffe aus der Mengenlehre definieren.

Teilmenge. Die Menge x heißt **Teilmenge** von der Menge y , $x \subseteq y$, wenn

$$(z \in x) \Rightarrow (z \in y)$$

(Man sieht leicht, dass $x = y$ genau dann wenn $x \subseteq y$ und $y \subseteq x$.)

Potenzmenge. Die Zusammenfassung aller Teilmengen einer Menge x ist eine Menge und heißt die **Potenzmenge von** x , symbolisch $\mathcal{P}x$.

$$\mathcal{P}x = \{y \ : \ (\forall z)(z \in y) \Rightarrow (z \in x)\}$$

Zusammenfassung von endlich vielen Mengen. Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ endlich viele unterschiedliche Mengen, dann ist die Zusammenfassung dieser Mengen wieder eine Menge, symbolisch $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Vereinigung. Sei x eine Menge. Die **Vereinigung von** x , $\bigcup x$, besteht aus den Elementen der Elemente von x , i.e.

$$\bigcup x = \{z \ : \ z \in y \text{ für ein } y \in x\}$$

Diese Notation ist anfangs ungewohnt. Vetrauter ist etwa die Vereinigung von zwei Mengen x_1 und x_2 . Diese besteht aus allen Elementen, die in x_1 oder x_2 liegen,

$$x_1 \cup x_2 = \{z \ : \ z \in x_1 \ \text{ oder } \ z \in x_2\}$$

Dies ist allerdings nichts anderes als $\bigcup x$, wobei $x = \{x_1, x_2\}$.

Durchschnitt. Sei x eine Menge. Der **Durchschnitt von** x , $\bigcap x$, besteht aus allen Elementen, die in jedem Element von x liegen.

$$\bigcap x = \{z \ : \ z \in y \ \text{ für alle } \ y \in x\}$$

$\bigcap\{x_1, x_2\}$ wird zumeist geschrieben als $x_1 \cap x_2$. Die Mengen x_1 und x_2 sind **disjunkt** wenn $\bigcap\{x_1, x_2\} = \emptyset$.

Bemerkung. Die leere Menge führt hier zu einem Problem. Während offenbar $\bigcup \emptyset = \emptyset$, würde $\bigcap \emptyset$ das ganze Universum sein (weil aus logischen Gründen $z \in y$ für jedes $y \in \emptyset$ wahr ist).

Wegen des Russell'schen Paradox darf dies nicht als Mengen zugelassen werden, d.h. wir definieren $\bigcap x$ nur, wenn $x \neq \emptyset$.

Differenzmenge. Seien X und Y Mengen. Die Differenz $X \setminus Y$ besteht aus allen Elementen von X die nicht in Y liegen.

$$X \setminus Y = \{x \in X \ : \ x \notin Y\}$$

Kartesische Produkte, Funktionen, Relationen.

Als nächstes soll das **geordnete Paar** (x_1, x_2) definiert werden. Dies soll ein Objekt sein, das aus x_1 und x_2 konstruiert wird, und folgende Eigenschaft hat

$$(x_1, x_2) = (y_1, y_2) \ \text{ genau dann wenn } \ x_1 = y_1 \ \text{ und } \ x_2 = y_2$$

Die Menge $\{x_1, x_2\}$ besitzt **nicht** diese Eigenschaft, weil $\{x_1, x_2\} = \{x_2, x_1\}$. Die "richtige" Konstruktion ist

$$(x_1, x_2) = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\} \quad \text{(und damit} \quad (x_1, x_1) = \{\{x_1\}\}) \ .$$

Satz. $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$ genau dann wenn $x_1 = y_1$ und $x_2 = y_2$

Beweis. (ständige Anwendung des Ausdehnungsprinzips)

Die Implikation von rechts nach links ist offensichtlich.

Sei $x_1 = x_2$, also $(x_1, x_1) = \{\{x_1\}\}$. Dann kann nicht $y_1 \neq y_2$ sein, weil $(x_1, x_1) = \{\{x_1\}\}$ ein Element hat, und (y_1, y_2) zwei Elemente. Also $y_1 = y_2$ und damit $\{\{x_1\}\} = \{\{y_1\}\}$ woraus $x_1 = y_1$ folgt.

Analog ist der Fall $y_1 = y_2$.

Sei also $x_1 \neq x_2$ und $y_1 \neq y_2$, und $\{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\} = \{\{y_1\}, \{y_1, y_2\}\}$.

Dann kann nicht $\{x_1\}$ gleich $\{y_1, y_2\}$ sein. Also $\{x_1\} = \{y_1\}$ und weiters $x_1 = y_1$. Weiters muss $\{x_1, x_2\} = \{y_1, y_2\} = \{x_1, y_2\}$ sein, und damit $x_2 = y_2$. $\square$

Bemerkung. Man kann nun **geordnete n-Tupel** für $n > 2$ induktiv definieren mittels

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = ((x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), x_n)$$

Man kann zeigen, dass $(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ genau dann wenn $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\ldots, x_n = y_n$.

Das **kartesische Produkt** $X_1 \times X_2$ von zwei Mengen X_1 und X_2 ist definiert als die Menge aller geordneten Paare (x_1, x_2) , wobei $x_1 \in X_1$ und $x_2 \in X_2$.

$X \times X$ wird auch in der Form X^2 geschrieben.

$X_1 \times \ldots \times X_n$ ist die Menge aller geordneten n-Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ wobei $x_1 \in X_1, \ldots, x_n \in X_n$.

Für $X \times \ldots \times X$ (n Faktoren) schreibt man X^n .

Bemerkung. Bislang wurde noch nicht das kartesische Produkt Πx für eine beliebige Menge x definiert, sodass $\Pi\{X_1, X_2\} = X_1 \times X_2$. Dies erfordert noch weitere Vorbereitungen.

Eine **Funktion** (oder **Abbildung**) $f : X \to Y$ von einer Menge X in eine Menge Y ist eine Teilmenge von $X \times Y$, i.e. $f \subseteq X \times Y$, sodass für jedes $x \in X$ genau ein $y \in Y$ existiert mit $(x, y) \in f$.

Diese Bedingung schreibt sich formaler

- $(\forall x \in X)(\exists y \in Y)\ ((x,y) \in f)$
- $(x,y_1),(x,y_2) \in f \ \Rightarrow\ (y_1 = y_2)$

Alternativ schreibt man auch $y = f(x)$ für $(x,y) \in f$.

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt **injektiv**, wenn

- $(x_1,y),(x_2,y) \in f \ \Rightarrow\ (x_1 = x_2)$

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt **surjektiv**, wenn

- $(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ ((x,y) \in f)$

Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Eine bijektive Funktion $f : X \to Y$ liefert eine 1-1 Beziehung zwischen den Elementen von X und Y . Beide Mengen haben 'gleich viele' Elemente.

Für eine bijektive Funktion $f : X \to Y$ gibt es eine **Inverse** $f^{-1} : Y \to X$, nämlich $f^{-1} = \{(y,x)\ :\ (x,y) \in f\}$.

Die **Komposition** (Hintereinanderausführung) von zwei Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ ist eine Funktion $g \circ f : X \to Z$, welche erklärt ist durch

$$g \circ f = \{(x,z)\ :\ (\exists y \in Y)\ ((x,y) \in f \text{ und } (y,z) \in g)\}$$

Eine spezielle Bijektion ist die **identische Abbildung** id_X auf einer Menge X , nämlich $id_X = \{(x,x)\ :\ x \in X\}$.

Ist $f : X \to Y$ irgendeine Funktion, dann gilt $f \circ id_X = id_Y \circ f = f$.

Ist $f : X \to Y$ bijektiv, dann gilt $f^{-1} \circ f = id_X$ und $f \circ f^{-1} = id_Y$.

Oft wird mit Y^X die Menge aller Funktionen von X nach Y bezeichnet.

Eine **Relation** zwischen zwei Mengen X und Y ist eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$. Falls $X = Y$, spricht man von einer **binären Relation**. Man beachte, dass jede Funktion eine spezielle Relation ist.

Ist $R \subseteq X \times Y$ eine Relation, dann schreibt man oft $x \; R \; y$ statt $(x, y) \in R$.

Ordnungsrelationen oder Äquivalenzrelationen sind typische Beispiele für Relationen.

Als nächstes betrachten wir das Konzept einer **indizierten Familie von Mengen**. Der Vorteil dieses Konzeptes ist, dass dieselbe Menge mehrfach als Komponente in der Familie vorkommen kann.

Eine **indizierte Mengenfamilie** (mit **Indexmenge** I) ist eine Abbildung $F : I \to W$.

Die Mengen, die in der Familie vorkommen, sind $X_i = F(i)$ für jedes $i \in I$.

Die Familie selbst wird oft in der Form $(X_i \;:\; i \in I)$ bzw. $(X_i)_{i \in I}$ geschrieben.

Vereinigung und Durchschnitt (nur für $I \neq \emptyset$) sind erklärt durch

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \{x \;:\; x \in X_i \text{ für ein } i \in I\} \quad \text{bzw.}$$

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \{x \;:\; x \in X_i \text{ für alle } i \in I\}$$

Damit kann nun das (beliebige!) kartesische Produkt einer Mengenfamilie definiert werden.

Sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Mengenfamilie gegeben durch $F : I \to W$.

Eine **Auswahlfunktion** für diese Familie ist eine Funktion $f : I \to \bigcup W$ mit der Eigenschaft dass $f(i) \in F(i)$ für alle $i \in I$.

f "wählt" aus jeder Menge X_i ein Element $x_i = f(i)$ aus. Eine Auswahlfunktion ist selbst eine Mengenfamilie, welche auch in der Form $(x_i \;:\; i \in I)$ bzw. $(x_i)_{i \in I}$ geschrieben wird.

Das **kartesische Produkt** $\prod_{i \in I} X_i$ ist definiert als die Menge aller Auswahlfunktionen für die Familie $(X_i)_{i \in I}$.

Beispiel. Sei $I = \{1, 2\}$, i.e. wir haben zwei Mengen X_1, X_2 vorliegen. Eine Auswahlfunktion wählt ein $x_1 \in X_1$ und ein $x_2 \in X_2$ aus und kann somit als geordnetes Paar (x_1, x_2) dargestellt werden, also erhalten wir in diesem Fall im wesentlichen $X_1 \times X_2$.

Bemerkung. Ist eine der Mengen von $(X_i)_{i \in I}$ leer, dann gibt es keine Auswahlfunktion.

Sei daher $X_i \neq \emptyset$ für jedes $i \in I$. Ist $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$?

Die positive Antwort ist das sogenannte **Auswahlaxiom**. Dieses wird später ausführlicher behandelt. Es kann aus den bisherigen Annahmen über Mengen weder bewiesen noch widerlegt werden.

Auswahlaxiom. Jede Familie nicht-leerer Mengen besitzt eine Auswahlfunktion.

Eigenschaften von Relationen.

Eine Relation $R \subseteq X \times X$ heißt

- **reflexiv** wenn $(x, x) \in R$ für alle $x \in X$
- **irreflexiv** wenn $(x, x) \notin R$ für alle $x \in X$
- **symmetrisch** wenn aus $(x, y) \in R$ folgt dass $(y, x) \in R$
- **antisymmetrisch** wenn $(x, y) \in R$, $(y, x) \in R \;\Rightarrow\; x = y$
- **transitiv** wenn $(x, y) \in R$, $(y, z) \in R \;\Rightarrow\; (x, z) \in R$

Eine **Äquivalenzrelation** ist eine Relation $R \subseteq X \times X$ welche reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Wir definieren weiters als die **R-Klasse von** $x \in X$ die Menge

$$R(x) = \{y \in X \;:\; (x, y) \in R\} .$$

Eine **Partition einer Menge** X ist eine Familie von paarweisen disjunkten Teilmengen von X welche X überdecken.

Genauer: eine Partition von X ist eine Menge P mit

- $p \neq \emptyset$ für alle $p \in P$
- $p \cap q = \emptyset$ für alle $p, q \in P$ mit $p \neq q$
- $\bigcup P = X$.

Satz. (Beweis als Übung)

1) Ist R eine Äquivalenzrelation auf X, dann ist $P = \{R(x) \ : \ x \in X\}$ eine Partition.

2) Ist P eine Partition von X, dann ist
$R = \{(x, y) \ : \ x, y \in p \text{ für ein } p \in P\}$ eine Äquivalenzrelation.

3) Die Konstruktionen in 1) und 2) sind zueinander invers.

Bemerkung. Ist R eine Äquivalenzrelation auf X, dann wird die Menge aller Äquivalenzklassen oft auch mit X/R bezeichnet.

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Das **Bild von** f, Im f, ist die Menge

$$\mathrm{Im}\ f = \{y \in Y \ : \ (\exists x \in X)\ (y = f(x))\} \ .$$

Der **Kern von** f, Ker f, ist die Relation

$$\mathrm{Ker}\ f = \{(x_1, x_2) \in X \times X \ : \ f(x_1) = f(x_2)\}$$

Satz. (Beweis als Übung) Sei $f : X \to Y$ eine Funktion.

1) Im f ist eine Teilmenge von Y

2) Ker f ist eine Äquivalenzrelation auf X

3) f induziert eine bijektive Abbildung $X/\mathrm{Ker} f$ nach Im f .

Weitere wichtige Relationen sind **Ordnungsrelationen** (wie wir sie etwa bei gewissen Zahlenmengen vorliegen haben, $\leq$ bzw. $<$).

Eine **Partialordnung auf** X ist eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf X .

Eine **strikte Partialordnung auf** X ist eine irreflexive, antisymmetrische und transitive Relation auf X .

Beispiele.

1) $\leq$ auf $\mathbb{N}$, $\subseteq$ auf $\mathcal{P}X$ sind Partialordnungen.

2) $<$ auf $\mathbb{N}$, $\subset$ auf $\mathcal{P}X$ sind strikte Partialordnungen.

Es gilt:

(i) Ist R eine Partialordnung, dann ist

$S = \{(x,y) \in R \ : \ x \neq y\}$ eine strikte Partialordnung.

(ii) Ist S eine strikte Partialordnung, dann ist

$R = S \cup \{(x,x) \ : \ x \in X\}$ eine Partialordnung.

Eine geläufige Schreibweise für partial geordnete Mengen ist $(X, \leq)$ und $(X, <)$ für strikt partialgeordnete Mengen.

Sei $(X, \leq)$ partialgeordnet. Gilt $x \leq y$ und $x \neq y$ dann schreibt man dafür auch $x < y$. Des weiteren sind die Notationen $x \geq y$ und $x > y$ selbsterklärend.

Eine Partialordnung $\leq$ auf X heißt **Totalordnung**, wenn je zwei Elemente vergleichbar sind, d.h.

für alle $x, y \in X$ gilt stets entweder $x < y$, $x = y$ oder $x > y$.

Beispiel. $\subseteq$ ist eine Partialordnung auf $\mathcal{P}X$, aber keine Totalordnung.

Sei $(X, \leq)$ eine partialgeordnete Menge. $x \in X$ heißt

- **kleinstes Element** von X wenn $x \leq y$ für alle $y \in X$
- **minimales Element** von X wenn $y \leq x \ \Rightarrow \ y = x$.

Analog werden die Begriffe **größtes Element** und **maximales Element** definiert.

Es gilt:

(i) Wenn ein kleinstes Element existiert, ist es minimal, und das eindeutig bestimmte minimale Element.

(ii) Bei einer Totalordnung ist ein minimales Element das kleinste Element.

Beispiele.

(i) Betrachte $(\mathcal{P}X, \subseteq)$. Dann ist $\emptyset$ das kleinste Element, und X das größte Element.

(ii) Betrachte $(\mathcal{P}X \setminus \{\emptyset\}, \subseteq)$. Dann gibt es kein kleinstes Element, und die minimalen Elemente sind die einelementigen Teilmengen.

Sei nun R eine Relation auf X , und S eine Relation auf Y .

Die Strukturen (X, R) und (Y, S) heißen **isomorph** wenn eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ existiert mit der Eigenschaft

$$(x_1, x_2) \in R \;\Leftrightarrow\; (f(x_1), f(x_2)) \in S$$

Man schreibt dann $(X, R) \simeq (Y, S)$. Offenbar kann der obige Isomorphiebegriff sinngemäß auf allgemeinere Situationen erweitert werden (Mengen mit mehreren Relationen).

Es gilt:

- $(X, R) \simeq (X, R)$ (identische Abbildung)
- $(X, R) \simeq (Y, S) \;\Rightarrow\; (Y, S) \simeq (X, R)$ (Umkehrabbildung)
- $(X, R) \simeq (Y, S)$, $(Y, S) \simeq (Z, T) \;\Rightarrow\; (X, R) \simeq (Z, T)$ (Komposition von Abbildungen)

Bijektionen.

Auf welche Art und Weise kann die "Größe" ("Anzahl der Elemente", Mächtigkeit) von Mengen gemessen werden, bzw. wann sind zwei Mengen "gleich groß"?

Obwohl die Menge der natürlichen Zahlen noch nicht genau definiert wurde, soll die Zahl n eine 'Standard'-Menge sein, sodass eine beliebige Menge n Elemente besitzt, wenn sie bijektiv zu dieser 'Standard'-Menge ist.

Definition. Zwei Mengen X und Y haben die gleiche **Mächtigkeit** (**Kardinalität**) wenn es eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ gibt.

Wir schreiben dafür $|X| = |Y|$.

Bemerkung. Was das Symbol $|X|$ bedeutet, ist vorderhand nicht erklärt. Obige Symbolik drückt nur die Existenz einer bijektiven Abbildung zwischen zwei Mengen aus.
D.h. es wird (noch nicht) gesagt, was die Mächtigkeit einer Menge ist, sondern nur, wann zwei Mengen gleichmächtig ist.

Definition. X hat **kleinere Kardinalität** (Mächtigkeit) als Y , $|X| \leq |Y|$, wenn eine injektive Abbildung $f : X \to Y$ existiert.

($|X| < |Y|$ wenn $|X| \leq |Y|$ und $|X| \neq |Y|$)

Bemerkung. Interessanterweise kann ohne das Auswahlaxiom **nicht** bewiesen werden, dass für zwei Mengen X und Y stets gilt dass $|X| \leq |Y|$ oder $|Y| \leq |X|$. (siehe Theorie der Kardinalzahlen)

Es gilt. Sei $X \neq \emptyset$ und $f : X \to Y$ injektiv. Dann gibt es eine surjektive Abbildung $g : Y \to X$.

Beweis. Sei $a \in X$ beliebig gewählt. Zu $y \in Y$ sei (falls existent) $g(y) = x \in X$ das eindeutig bestimmte Element mit $f(x) = y$, ansonsten sei $g(y) = a$. Dann ist $g : Y \to X$ tatsächlich eine Abbildung, offenbar surjektiv, und es gilt $g \circ f = id_X$. $\square$

Die bisherige Notation suggeriert, dass wenn $|X| \leq |Y|$ und $|Y| \leq |X|$ erfüllt sind, auch $|X| = |Y|$ gilt. D.h. wenn es eine injektive Abbildung

$X \to Y$ gibt und eine injektive Abbildung $Y \to X$, dann gibt es eine bijektive Abbildung $X \to Y$. Dies ist tatsächlich der Fall und nichttrivial.

Satz. (Schröder-Bernstein)

$$|X| \le |Y| \; , \; |Y| \le |X| \; \Rightarrow \; |X| = |Y|$$

Beweis.

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ injektiv. Wir nehmen oBdA an, dass X und Y disjunkt sind. Weiters dass weder f noch g bijektiv sind (ansonsten wären wir fertig).

$y \in Y$ heißt **Elternteil von** $x \in X$ wenn $g(y) = x$. $x \in X$ heißt **Elternteil von** $y \in Y$ wenn $f(x) = y$.
(Offenbar ist $y \in Y$ Elternteil von $g(y)$, und $x \in X$ ist Elternteil von $f(x)$).

Wegen der Injektivität hat jedes $x \in X$ und $y \in Y$ höchstens einen Elternteil. Weiters hat $x \in X$ (bzw. $y \in Y$) keinen Elternteil wenn $x \notin \mathrm{Im} g$ (bzw. $y \notin \mathrm{Im} f$).

Eine **Vorfahrenkette** für $z \in X \cup Y$ ist ein Tupel $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ wobei $z_0 = z$ und z_{i+1} ist Elternteil von z_i für $z = 0, 1, \ldots, n-1$.

z hat **unendliche Tiefe** wenn z eine beliebig lange Vorfahrenkette besitzt. Ist das nicht der Fall, gibt es eine längste Vorfahrenkette $(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ für z und n ist die **Tiefe** von z (z_n hat dann keinen Elternteil).

Die Mengen X_e bzw. X_o bzw. X_∞ bestehen aus den Elementen von X mit gerader bzw. ungerader bzw. unendlicher Tiefe. Offenbar bilden diese Mengen eine Partition von X .

Analog sind die Mengen Y_e , Y_o , Y_∞ definiert.

Zu $x \in X$ gibt es die Vorfahrenkette $(f(x), x, \ldots)$. Hat also $x \in X$ eine endliche Tiefe, dann hat $f(x)$ eine um 1 größere Tiefe, hat $x \in X$ unendliche Tiefe, dann hat $f(x)$ ebenfalls unendliche Tiefe.

Damit bildet f die Menge X_e in Y_0 ab, X_0 in Y_e , und X_∞ in Y_∞ .

Weil die Elemente von Y_0 und Y_∞ offenbar Elternteile haben, ist f eine

Bijektion zwischen X_e und Y_0 , und zwischen X_∞ und Y_∞ , allerdings keine Bijektion zwischen X_0 und Y_e , weil nicht jedes Element in Y_e einen Elternteil besitzt.

Also $X_e \underset{\text{bijektiv}}{\overset{f}{\longleftrightarrow}} Y_0$, $X_0 \underset{\text{injektiv}}{\overset{f}{\to}} Y_e$, $X_\infty \underset{\text{bijektiv}}{\overset{f}{\longleftrightarrow}} Y_\infty$

Sei $h : X \to Y$ erklärt durch

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{wenn} \quad x \in X_e \cup X_\infty \\ y & \text{wenn} \quad x \in X_0 \ , \ g(y) = x \end{cases}$$

Wir zeigen nun, dass die Abbildung h bijektiv ist.

Sei $y \in Y$. Falls $y \in Y_0 \cup Y_\infty$ dann existiert ein $x \in X_e \cup X_\infty$ mit $f(x) = y$ und folglich $h(x) = f(x) = y$.

Sei $y \in Y_e$ und setze $x = g(y)$. Dann ist $x \in X_0$ (wegen der Vorfahrenkette $(x, y, \ldots)$) und $h(x) = y$.

Damit ist h surjektiv.

Sei nun $h(x_1) = h(x_2) = y$.

Sind $x_1, x_2 \in X_e \cup X_\infty$ dann $f(x_1) = f(x_2)$ und folglich $x_1 = x_2$.

Sind $x_1, x_2 \in X_0$ dann $g(y) = x_1$, $g(y) = x_2$ also $x_1 = x_2$.

Sei nun $x_1 \in X_e \cup X_\infty$ und $x_2 \in X_0$. Dann ist

$y = f(x_1) = h(x_1) = h(x_2)$ mit $g(y) = x_2$. Wir erhalten die Vorfahrenkette $(x_2, y, x_1, \ldots)$ woraus $x_1 \in X_0$ folgt, ein Widerspruch! Dieser Fall ist also nicht möglich.

Damit ist die Abbildung h bijektiv. $\square$

Für einen weiteren Beweis betrachten wir zuerst zwei Hilfsergebnisse.

Lemma 1. Sei X eine Menge und $p : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}X$ mit $p(A) \subseteq p(B)$ falls $A \subseteq B$. Dann gibt es ein $Z \subseteq X$ mit $p(Z) = Z$.

Beweis. Sei $Z = \bigcup \{A \subseteq X \ : \ A \subseteq p(A)\}$.

Sei $Z = \emptyset$. Annahme: $p(\emptyset) = A \neq \emptyset$. Wegen $\emptyset \subseteq A$ ist $A = p(\emptyset) \subseteq p(A)$

und damit $A \subseteq Z$, ein Widerspruch! Also $p(\emptyset) = \emptyset$.

Ansonsten sei $z \in Z$. Dann $\exists\, A$ mit $A \subseteq p(A)$ und $z \in A$. Dann ist weiters $z \in p(A) \subseteq p(Z)$, folglich $Z \subseteq p(Z)$.

Weiters ist $p(Z) \subseteq p(p(Z))$, und damit ist $p(Z)$ einer der Mengen A , also $p(Z) \subseteq Z$ und insgesamt $p(Z) = Z$. $\square$

Lemma 2. Seien X und Y Mengen und $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ injektiv.

Für $A \subseteq X$ sei $p(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A))$.

Dann gilt $p(A) \subseteq p(B)$ für $A \subseteq B$.

Beweis. Sei $A \subseteq B$. Annahme: $\exists\, x \in p(A) \setminus p(B)$.

$x \in g(Y \setminus f(B)) \ \Rightarrow\ x = g(y)$ für ein $y \notin f(B)$.

Weil $A \subseteq B$ gilt $f(A) \subseteq f(B)$ und $Y \setminus f(B) \subseteq Y \setminus f(A)$, und damit $y \notin f(A)$.

Es folgt $x = g(y) \in g(Y \setminus f(A)) \ \Rightarrow\ x \notin p(A)$, ein Widerspruch!

Folglich $p(A) \subseteq p(B)$. $\square$

Weiterer Beweis des Satzes von Schröder-Bernstein:

Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ injektiv, und $p : \mathcal{P}X \to \mathcal{P}X$ wie in Lemma 2.

Dann gibt es eine Menge $Z \subseteq X$ mit $p(Z) = Z$.

Sei $h : X \to Y$ definiert durch

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{wenn} \quad x \in Z \\ y & \text{wenn} \quad x \notin Z\ ,\ g(y) = x \end{cases}$$

(Man beachte: $x \notin Z \ \Rightarrow\ x \in g(Y \setminus f(Z)) \ \Rightarrow\ x = g(y)$ für ein $y \notin f(Z)$).

Zur Übung zeige man, dass h bijektiv ist. $\square$

Ein sehr wichtiger Fall, wo zwar eine injektive Abbildung zwischen zwei Mengen existiert, aber keine bijektive Abbildung, ist die folgende Aussage.

Satz. (Cantor)

Sei $X \neq \emptyset$. Dann gilt $|X| < |\mathcal{P}X|$.

Beweis. Die Abbildung $f : X \to \mathcal{P}X$ mit $f(x) = \{x\}$ ist offenbar injektiv, also $|X| \leq |\mathcal{P}X|$.

Annahme: $\exists\, h : X \to \mathcal{P}X$ bijektiv. Sei $Y = \{x \in X \;:\; x \notin h(x)\}$.

Laut Voraussetzung $\exists\, y \in X$ mit $h(y) = Y$. Dann gilt aber

$y \in Y \;\Rightarrow\; y \notin Y$ und $y \notin Y \;\Rightarrow\; y \in Y$, ein Widerspruch! $\square$

Endliche Mengen - Überblick.

In Vorwegnahme des Kapitels über Ordinalzahlen bezeichnen wir mit n eine "Standard" n-elementige Menge, die rekursiv gegeben ist durch

$$n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$$

Dabei gilt dann die Entsprechung $0 \simeq \emptyset$, und damit weiters

$$1 = \{0\} \simeq \{\emptyset\}\ ,\ 2 = \{0, 1\} \simeq \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \text{ etc.}$$

Wir setzen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ und sagen dass eine Menge n Elemente besitzt wenn es eine Bijektion $X \to n$ gibt.

Satz. Gibt es eine Bijektion zwischen n und m , dann ist $n = m$.

Folgerung. Zu jeder Menge X gibt es höchstens ein n sodass X bijektiv zu n ist.

X heißt **endlich**, wenn ein derartiges n existiert (und wir schreiben $|X| = n$) , sonst **unendlich**.

Genauer, **Peano-endlich** bzw. **Peano-unendlich**.

Eine Menge X heißt **Dedekind-unendlich**, wenn eine Bijektion zwischen X und einer echten Teilmenge von X existiert, sonst **Dedekind-endlich**.

Stets gilt: Peano-endlich $\Rightarrow$ Dedekind-endlich

Für den Beweis der Umkehrung wird zwingend das Auswahlaxiom benötigt (d.h. die Aussage ist ohne Annahme des Auswahlaxioms nicht beweisbar).

Weitere Aussagen über endliche Mengen sind

Satz. (Inklusions-Exklusions-Prinzip)

Sei U eine endliche Menge und $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von U .

Für $J \subseteq I$, $J \neq \emptyset$ sei $A_J = \bigcap_{i\in J} A_i$, und sei $A_\emptyset = U$.

Dann ist die Anzahl der Elemente, die in keiner Menge A_i liegen gleich

$$\sum_{J\subseteq I} (-1)^{|J|}|A_J|$$

Satz. Sei $|X| = m$, $|Y| = n$.

1) Es gibt n^m Funktionen von X nach Y ,

2) Es gibt $n(n-1)\dots(n-m+1)$ injektive Funktionen von $X \to Y$,

3) Es gibt $\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)^m$ surjektive Funktionen von $X \to Y$.

Abzählbare Mengen.

Eine Menge X heißt **abzählbar** (oder abzählbar unendlich), wenn $|X| = |\mathbb{N}|$, und **höchstens abzählbar** wenn es eine injektive Abbildung $X \to \mathbb{N}$ gibt.

Satz. X ist höchstens abzählbar $\Leftrightarrow$ X ist endlich oder abzählbar.

Beweis. "$\Leftarrow$" ist trivial.

"$\Rightarrow$": Sei $f : X \to \mathbb{N}$ injektiv. Definiere $g : X \to \mathbb{N}$ durch

$g(x) = 0$ wenn $f(x)$ das kleinste Element von $f(X)$ ist,

$g(x) = n$ wenn $f(x)$ das kleinste Element von
$f(X \setminus \{g^{-1}(0), \dots, g^{-1}(n-1)\})$ ist.

Dieser Prozess endet entweder nach endlich vielen Schritten (wenn $g(X) = \{0, 1, , \dots, n-1\}$, und damit ist X endlich).

Ansonsten ist g bijektiv. $\square$

Bemerkung. Ist X höchstens abzählbar, dann können die Elemente von X als endliche Folge $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ (Aufzählung der Elemente) oder als unendliche Folge $x_0, x_1, x_2, \dots$ geschrieben werden.

Satz. $\exists$ surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to X \Leftrightarrow X$ ist höchstens abzählbar.

Beweis. "$\Leftarrow$" ist trivial.

"$\Rightarrow$": Sei $g : \mathbb{N} \to X$ surjektiv. Für jedes $x \in X$ hat die Menge $\{n \in \mathbb{N} \ : \ g(n) = x\}$ ein kleinstes Element m_x .

Sei $f : X \to \mathbb{N}$ erklärt durch $f(x) = m_x$. Dann ist f injektiv weil

$$f(x) = f(y) \ \Rightarrow \ m_x = m_y \ \Rightarrow \ x = g(m_x) = g(m_y) = y \ . \quad \square$$

Satz.

(a) Die Vereinigung von höchstens abzählbar vielen Mengen, welche höchstens abzählbar sind, ist höchstens abzählbar.

(b) Das kartesische Produkt von zwei höchstens abzählbaren Mengen ist höchstens abzählbar.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist.

Sei $S_k = \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ : \ i + j = k\}$.

Wir erhalten damit endliche Mengen $S_0, S_1, S_2, \dots$, und die Menge S_k hat die $k+1$ Elemente $(0,k), (1,k-1), \dots (k,0)$.

$$\begin{array}{llll} (0,0) & (0,1) & (0,2) & \dots \\ (1,0) & (1,1) & (1,2) & \dots \\ (2,0) & (2,1) & (2,2) & \dots \end{array}$$

etc.

Wir betrachten die Anordnung: zuerst das Element von S_0 , dann die beiden Elemente von S_1 , dann die drei Elemente von S_2 usf.

Dies liefert eine Bijektion $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, und damit ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar.

(Übung: diese Bijektion ist gegeben durch $f((i,j)) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$.)
etc.

Zu (b): Sind X, Y höchstens abzählbar, gibt es abzählbare Mengen X', Y' mit $X \subseteq X'$ und $Y \subseteq Y'$. Folglich $|X \times Y| \leq |X' \times Y'|$.
etc.

Zu (a): es genügt zu zeigen, dass die abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist.

Seien $X_0, X_1, X_2, \ldots$ abzählbare Mengen und $X_i = \{x_{i0}, x_{i1}, x_{i2}, \ldots\}$ für jedes i.

Dann ist die Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ mit $f((i,j)) = x_{ij}$ surjektiv, folglich ist die Vereinigung abzählbar. $\square$

Übung. Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar. (Hingegen ist die Menge **aller** Teilmengen von $\mathbb{N}$ nach dem Satz von Cantor **nicht** abzählbar.)

Folgerung. $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ sind abzählbar.

Satz. $\mathbb{R}$ ist **nicht** abzählbar.

Beweis. Annahme: $\mathbb{R}$ ist abzählbar. Dann ist auch das offene Intervall $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ abzählbar und kann als Aufzählung $(0,1) = \{r_0, r_1, r_2, \ldots\}$ geschrieben werden.

Jedes r_i kann als unendlicher Dezimalbruch geschrieben werden (eventuell mit unendlich vielen Nullen am Schluß),

$$r_i = 0.x_{i0}x_{i1}x_{i2}\ldots \quad \text{wobei} \quad 0 \leq x_{ij} \leq 9$$

Sei nun $y_i = 7$ wenn $x_{ii} \neq 7$, und $y_i = 3$ wenn $x_{ii} = 7$.

Dann ist $y_i \neq x_{ii}$ für jedes i , und die Zahl $r = 0.y_0y_1y_2\ldots$ kommt in der Liste nicht vor, ein Widerspruch! $\square$