Formale Systeme, formale Logik

Anregung von David Hilbert: Um die Widerspruchsfreiheit einer mathematischen Disziplin zu gewährleisten, sollte diese in eine formale Sprache übersetzt werden, die rein "mechanisch" manipuliert werden kann (die Argumente sind konstruktiv und es tauchen keine "Unendlichkeiten" auf).

Dieses Vorhaben wurde allerdings von K. Gödel zunichte gemacht.

In formalen Systemen wird mit Zeichenketten (endlichen Folgen) eines fest gegebenen Alphabets operiert. Zeichenketten werden oft auch als Strings bezeichnet. Diese haben in sich selbst keine Bedeutung. Lediglich der syntaktische Aspekt ist wesentlich.

Obwohl die Begriffe "Axiom", "Ableitungsregel", "Satz" ("Theorem") und "Beweis" vorkommen, haben diese innerhalb des formalen Systems ihre spezielle Bedeutung, allerdings (vorderhand) keine weitere mathematische Bedeutung.

Die auftretenden Formeln müssen in einem weiteren Schritt interpretiert werden, um einen Zusammenhang zu einem mathematischen Gebiet herstellen zu können. (Semantik)

Es gibt also stets einen **syntaktischen** Aspekt, und einen **semantischen** Aspekt.

Ein **formales System** umfasst

• ein **Alphabet** A , also eine Menge von Symbolen. Aus diesen Symbolen können dann **Zeichenketten** gebildet werden.

• eine Menge von **Formeln**.

Eine Formel ist eine gewisse Zeichenkette. Es muss allerdings eine rein mechanische Regel geben, die entscheidet, ob eine vorgelegte Zeichenkette eine Formel ist.

Formeln sind also die auftretenden "wohlgeformten" Zeichenketten.

- eine Menge von **Axiomen**.

Jedes Axiom ist eine Formel. Es dürfen auch unendlich viele Axiome vorkommen, allerdings muss mechanisch entschieden werden können, ob eine Formel ein Axiom ist.

- eine Menge von **Ableitungsregeln**.

Jede Ableitungsregel hat als 'Input' eine endliche Folge von Formeln und liefert als 'Output' eine Formel.

(Die Anwendung einer Ableitungsregel muss "mechanisch" erfolgen. Es muss entschieden werden können, ob eine Ableitungsregel korrekt angewandt wurde.)

Ein **Beweis** in einem formalen System ist eine endliche Folge von Formeln, wobei jedes Folgenglied ein Axiom ist oder von früheren Folgengliedern durch Anwendung einer Ableitungsregel erhalten wurde.

Ein **Satz** (bzw. **Theorem**) ist die letzte Formel in einem Beweis.

(Um Beweise zu vereinfachen, können in einem Beweis auch bereits hergeleitete Sätze verwendet werden.)

Theoretisch können damit alle Sätze mechanisch generiert werden. Allerdings wird es i.a. keine Entscheidungsprozedur geben, welche aussagt, ob eine vorgelegte Formel ein Satz ist oder nicht.

Formale Systeme können nun selbst als mathematische Objekte betrachtet und untersucht werden. Dies führt zum Begriff des **Metatheorems** (bzw. **Meta-Satzes**). Ein Metatheorem ist eine Aussage über das formale System als solches.

Beispiel. Das MU-System.

- Alphabet $A = \{M, I, U\}$

- Jede nichtleere Zeichenkette ist eine Formel.
- ein Axiom : MI
- 4 Ableitungsregeln

1. Endet eine Zeichenkette mit I , kann ein U am Ende hinzugefügt werden.

2. Ist Mx gegeben (eine Zeichenkette beginnend mit M), dann kann x dupliziert werden, also $Mx \to Mxx$

3. Drei aufeinanderfolgende I's können durch ein U ersetzt werden.

4. Zwei aufeinanderfolgende U's können gelöscht werden.

Beispiel für einen Beweis:

$$MI \xrightarrow{2.} MII \xrightarrow{2.} MIIII \xrightarrow{3.} MUI \xrightarrow{1.} MUIU$$

Frage. Ist MU ein Satz?

(Wird ein Beweis gefunden, ist die Antwort offensichtlich 'Ja'. Wird kein Beweis gefunden, ist keine Aussage möglich)

Es zeigt sich, dass MU **kein** Satz in diesem formalen System ist. Dies wird über ein Metatheorem gezeigt. Das bevorzugte Beweismittel bei Metatheoremen ist Induktion über die Länge eines Beweises.

Satz. Die Anzahl der I's in einem Satz ist nicht durch 3 teilbar.

Beweis. (durch Induktion über die Länge eines Beweises)

Der kürzeste Beweis hat die Länge 1, und besteht aus dem Axiom MI . Die Aussage ist also erfüllt.

Annahme: der Satz t habe einen Beweis der Länge n , und die Aussage sei erfüllt für alle Sätze mit kürzeren Beweisen.

Falls t Axiom ist, sind wir fertig. Ansonsten folgt t aus s durch Anwendung einer Ableitungsregel.

Sei x die Anzahl der I's in s (und lt. Vor. ist dann x nicht durch 3 teilbar), und sei y die Anzahl der I's in t .

Regel 1 liefert dann $y = x$, Regel 2 liefert $y = 2x$, Regel 3 liefert $y = x - 3$ und Regel 4 liefert $y = x$.

Damit ist y ebenfalls nicht durch 3 teilbar. $\square$

. . . . . .

Aussagenlogik

In diesem Teil geht es nun darum, die Aussagenlogik zu formalisieren.

- Wir verwenden abzählbar viele **Aussagenvariable** $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$
- **Verknüpfungssymbole** : $\wedge$ ("und") , $\vee$ ("oder") , $\neg$ ("nicht")

$\rightarrow$ ("impliziert") , $\leftrightarrow$ ("genau dann, wenn")

- **Klammern** (um Formeln unmißverständlich schreiben zu können)
- **Bildung von Formeln** : Jede Aussagenvariable ist eine Formel.

Wenn ϕ und ψ Formeln sind, dann auch

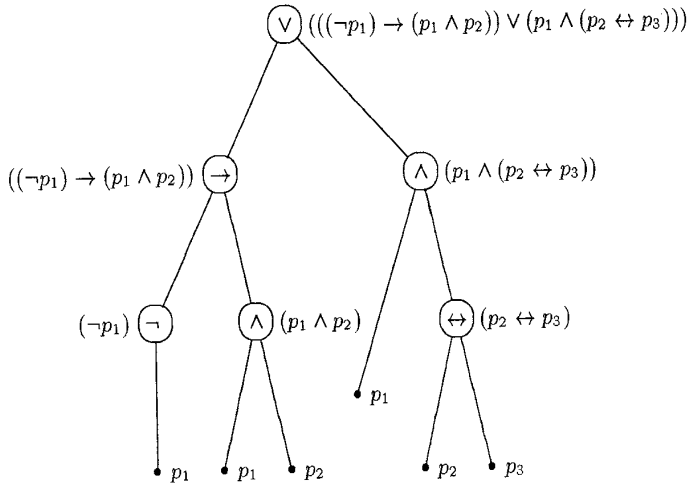
$(\neg\phi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$

Bemerkung. Für eine gegebene Zeichenkette kann "mechanisch" entschieden werden, ob sie eine Formel ist oder nicht.

Dies kann etwa in Form eines 'Baumes' dargestellt werden, wie wir am Beispiel

$$(((\neg p_1) \rightarrow (p_1 \wedge p_2)) \vee (p_1 \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3)))$$

illustrieren.



Bemerkung. Es ist wichtig festzuhalten, dass vorderhand eine Formel eine bloße Zeichenkette ist und **keine Bedeutung** hat.

Natürlich spielen beim Aufstellen eines formalen Systems gewisse 'Hintergedanken' eine Rolle, was die Formeln bedeuten sollen bzw. können. (**Semantik**)

Beispielsweise können wir die Aussagenvariablen als 'Grundaussagen' interpretieren.

Beispiel. Wir betrachten Aussagen über eine Gruppe G .

$p_0 \ldots$ "G ist abelsch"

$p_1 \ldots$ "Alle Elemente von G haben Ordnung 1 oder 2"

$p_2 \ldots$ "G ist endlich"

etc.

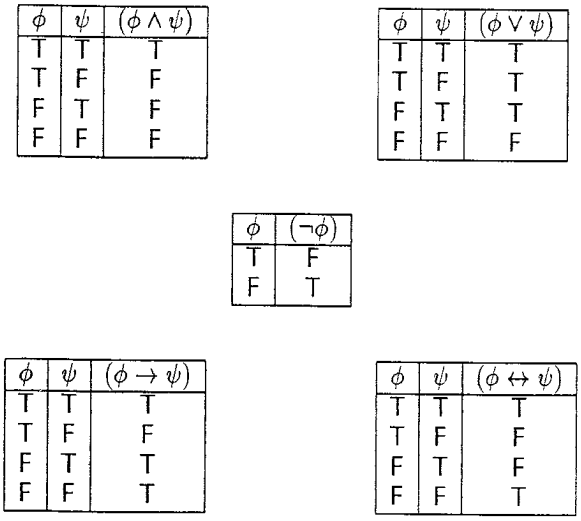
Dann wäre $(p_1 \to p_0)$: "Wenn alle Elemente von G die Ordnung 1 oder 2 haben, dann ist G abelsch".

$(\neg p_2)$ wäre: "G ist unendlich" $\square$

Ein Ziel der Überlegungen ist es zu entscheiden, ob eine Formel "wahr" oder "falsch" ist. Dies führt zum Begriff der Bewertung.

Eine **Bewertung** ist eine Funktion v von der Menge aller Formeln in die Menge $\{T, F\}$ ("True","False"), die folgendermaßen gebildet wird:

Zuerst wird jeder Aussagenvariablen p_i ein **Wahrheitswert** (T oder F) zugeordnet, danach gemäß dem Bildungsgesetz von Formeln mit Hilfe der sogenannten **Wahrheitstafeln**.



ϕ	ψ	$(\phi \wedge \psi)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ϕ	ψ	$(\phi \vee \psi)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ϕ	$(\neg\phi)$
T	F
F	T

ϕ	ψ	$(\phi \to \psi)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ϕ	ψ	$(\phi \leftrightarrow \psi)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

Damit etwa: Wenn $v(\phi) = T$ und $v(\psi) = T$, dann ist $v(\phi \wedge \psi) = T$.

Im Beispiel vorher hatten wir

$$\phi: \quad (((\neg p_1) \to (p_1 \wedge p_2)) \vee (p_1 \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3))) \ .$$

Seien etwa $v(p_1) = v(p_2) = T$, $v(p_3) = F$. Dann ergibt sich $v(\phi) = T$.

Bemerkung. Eine Bewertung ist damit durch die Werte für die Aussagenvariablen eindeutig bestimmt!

Definition. Sei ϕ eine Formel.

1) ϕ heisst **Tautologie**, wenn $v(\phi) = T$ **für alle** Bewertungen v .

2) ϕ heisst **Widerspruch**, wenn $v(\phi) = F$ **für alle** Bewertungen v .

3) ϕ heisst **logische Folgerung** aus einer Menge Σ von Formeln, wenn für jede Bewertung v gilt: ist $v(\sigma) = T$ für jedes $\sigma \in \Sigma$, dann ist auch $v(\phi) = T$.

Beispiele.

- $(p_2 \vee (\neg p_2))$ ist eine Tautologie.
- $(p_1 \to p_0)$ ist weder Tautologie noch Widerspruch.
- $(p_2 \wedge (\neg p_2))$ ist ein Widerspruch.
- $(p_1 \vee p_2)$ ist eine logische Folgerung aus $\Sigma = \{p_1, (p_1 \wedge p_2)\}$.

Wir entwickeln nun die Formalisierung der Aussagenlogik weiter und erwähnen, dass alle Verknüpfungen nur durch "$\neg$" und "$\to$" ausgedrückt werden können, weil

$(\phi \vee \psi)$ und $((\neg\phi) \to \psi)$

$(\phi \wedge \psi)$ und $(\neg(\phi \to (\neg\psi)))$

$(\phi \leftrightarrow \psi)$ und $(\neg((\phi \to \psi) \to (\neg(\psi \to \phi))))$

die gleichen Wahrheitstafeln haben.

Ein formales System wird nun geliefert durch das **Axiome-Schema** (d.h. für alle Formeln ϕ , ψ , θ ergibt sich ein Axiom)

(A1) $(\phi \to (\psi \to \phi))$

(A2) $((\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta)))$

(A3) $(((\neg\phi) \to (\neg\psi)) \to (\psi \to \phi))$

und die **Ableitungsregel** (Modus Ponens)

- Aus ϕ und $(\phi \to \psi)$ leite ψ her.

Bemerkung. Zur Übung zeige man, dass alle Axiome Tautologien sind.

Ein **Beweis** ist wiederum eine endliche Folge von Formeln, wo jedes Folgenglied ein Axiom ist oder von einer früheren Formel mit der Ableitungsregel erhalten wurde. Ein **Satz** ist die letzte Zeile eines Beweises. Die Sätze sind

also die herleitbaren Formeln.

Ein **Beweis von** ϕ **aus** Σ (wobei Σ eine Menge von Formeln ist) ist eine endliche Folge von Formeln, wo jedes Folgenglied ein Axiom ist, oder aus Σ kommt, oder von früher durch Anwendung der Ableitungsregel entstanden ist.

Übliche Schreibweise eines Beweises:

$\vdash$ bzw. $\Sigma \vdash$ vor jeder Formel.

Beispiel. Für jede Formel ϕ ist $(\phi \to \phi)$ ein Satz.

Beweis.

$\vdash \quad ((\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi)) \to ((\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi)))$

$((\text{A2}) \text{ mit } \phi = \phi \ , \ \psi = (\phi \to \phi) \ , \ \theta = \phi)$

$\vdash \quad (\phi \to ((\phi \to \phi) \to \phi))$

$((\text{A1}) \text{ mit } \phi = \phi \ , \ \psi = (\phi \to \phi))$

$\vdash \quad ((\phi \to (\phi \to \phi)) \to (\phi \to \phi))$

(Modus Ponens aus den ersten beiden Formeln)

$\vdash \quad (\phi \to (\phi \to \phi))$

$((\text{A1}) \text{ mit } \phi = \phi \ , \ \psi = \phi)$

$\vdash \quad (\phi \to \phi)$

(Modus Ponens aus den beiden vorhergehenden Formeln) $\square$

Damit Beweise vereinfacht werden können, werden u.a. auch Metatheoreme verwendet, z.B.

Satz. (**Ableitungstheorem**)

Sei Σ eine Menge von Formeln. Wenn ϕ aus $\Sigma \cup \{\psi\}$ hergeleitet werden

kann, dann kann $(\psi \to \phi)$ aus Σ hergeleitet werden.

Beweis.

Vorbemerkung. (A1) und Modus Ponens zeigen: wenn ϕ aus einer Menge von Hypothesen hergeleitet werden kann, dann auch $(\psi \to \phi)$.

Der eigentliche Beweis des Ableitungstheorems wird mittels Induktion über die Länge eines Beweises geführt.

(i) Es gibt einen einzeiligen Beweis von ϕ aus $\Sigma \cup \{\psi\}$.

Dann ist ϕ ein Axiom, $\phi \in \Sigma$ oder $\phi = \psi$.

Die ersten beiden Möglichkeiten wurden in der Vorbemerkung behandelt, die dritte Möglichkeit im Beispiel davor gezeigt.

(ii) Beweis von ϕ hat größere Länge, und die Behauptung gelte für Formeln mit kürzeren Beweisen.

Folglich wird ϕ hergeleitet aus θ und $(\theta \to \phi)$ mittels Modus Ponens.

θ und $(\theta \to \phi)$ tauchen vorher auf und haben kürzere Beweise.

Laut Induktionsvoraussetzung gilt dann, dass $(\psi \to \theta)$ und $(\psi \to (\theta \to \phi))$ aus Σ hergeleitet werden können.

Mit (A2) in der Form $((\psi \to (\theta \to \phi)) \to ((\psi \to \theta) \to (\psi \to \phi)))$

(wobei ψ statt ϕ , θ statt ψ und ϕ statt θ) und Modus Ponens erhalten wir

$$((\psi \to \theta) \to (\psi \to \phi)) \ .$$

Nochmalige Anwendung von Modus Ponens liefert $(\psi \to \phi)$. $\square$

Beispiel. $((\neg\phi) \to (\phi \to \psi))$ ist ein Satz.

Beweis. Setzen wir $\Sigma = \emptyset$ und ersetzen im Ableitungstheorem ψ durch $(\neg\phi)$ und ϕ durch $(\phi \to \psi)$, dann ist zu zeigen, dass $(\phi \to \psi)$ aus $(\neg\phi)$ hergeleitet werden kann.

$\{(\neg\phi)\} \vdash \quad ((\neg\phi) \to ((\neg\psi) \to (\neg\phi)))$ (mit (A1))

$\{(\neg\phi)\} \vdash \quad (\neg\phi) \qquad$ (ist Voraussetzung)

$\{(\neg\phi)\} \vdash \quad ((\neg\psi) \to (\neg\phi)) \qquad$ (Modus Ponens)

$\{(\neg\phi)\} \vdash \quad (((\neg\psi) \to (\neg\phi)) \to (\phi \to \psi)) \qquad$ (mit (A3))

$\{(\neg\phi)\} \vdash \quad (\phi \to \psi) \qquad$ (Modus Ponens)

Mit dem Ableitungstheorem folgt nun $\vdash \quad ((\neg\phi) \to (\phi \to \psi))$. $\quad \square$

. . . . . .

Korrektheit und Vollständigkeit

Im Rahmen der bisherigen Diskussion haben wir schon mehrmals auf den **syntaktischen** Aspekt und den **semantischen** Aspekt hingewiesen.

Innerhalb des formalen Systems geht es nur um den syntaktischen Aspekt. Im besonderen um Beweise und Sätze und damit um die Menge der herleitbaren Sätze. Sätze haben innerhalb des formalen Systems keine Bedeutung.

Bewertungen geben den Formeln eine "Bedeutung", sie können wahr oder falsch sein, Tautologien oder Folgerungen aus einer gegebenen Menge von Formeln.

Wünschenswert ist es natürlich, dass ein Satz (im formalen System) einer Tautologie entspricht und umgekehrt. Dies ist der Inhalt des nachfolgenden Korrektheits- und Vollständigkeitssatzes.

(Man könnte im nachhinein sagen, dass die Axiome und die Ableitungsregel genau so gewählt wurden, damit dieser Satz gilt.)

"Korrektheit" bedeutet allgemein, dass die Sätze im formalen System 'wahr' sind.

"Vollständigkeit" bedeutet, dass alle 'wahren' Aussagen aus dem Kalkül bewiesen bzw. hergeleitet werden können.

Definition. Eine Menge Σ von Formeln ist **inkonsistent**, wenn es eine Formel ψ gibt, sodass ψ und $(\neg\psi)$ aus Σ hergeleitet werden können. Ansonsten heißt Σ **konsistent**.

(Trivialerweise ist $\Sigma = \{\phi\ ,\ (\neg\phi)\}$ inkonsistent.)

Satz. (**Korrektheit** und **Vollständigkeit** im Falle von endlich vielen oder abzählbar vielen Aussagenvariablen)

(a) Eine Formel ist eine Tautologie genau dann wenn sie ein Satz ist (also herleitbar aus den Axiomen).

(b) Eine Formel ist eine logische Folgerung einer Menge Σ von Formeln genau dann wenn sie aus Σ herleitbar (beweisbar) ist.

(c) Eine Menge Σ von Formeln ist konsistent genau dann, wenn es eine Bewertung v gibt sodass $v(\sigma) = T$ für alle $\sigma \in \Sigma$.

Beweis.

Vorbemerkung. Mittels der Wahrheitstafeln kann einfach gezeigt werden, dass die Axiome Tautologien sind. Des weiteren ist der Modus Ponens "wahrheitserhaltend", d.h. ist $v(\phi) = T$ und $v((\phi \to \psi)) = T$, dann gilt auch $v(\psi) = T$. Sind also ϕ und $(\phi \to \psi)$ Tautologien, dann ist auch ψ eine Tautologie.

A. Mittels Induktion über die Länge eines Beweises folgt nun: wenn ϕ ein Satz ist, dann ist ϕ eine Tautologie.

Ist ϕ aus Σ beweisbar, dann gilt für jede Bewertung v mit $v(\sigma) = T$ für alle $\sigma \in \Sigma$ auch dass $v(\phi) = T$.

Speziell: Gibt es eine Bewertung v mit $v(\sigma) = T$ für alle $\sigma \in \Sigma$, dann muß Σ konsistent sein (weil keine Bewertung gleichzeitig ψ und $(\neg\psi)$ wahr machen kann.)

Des weiteren bemerken wir, dass (a) ein Spezialfall von (b) ist (nämlich wenn $\Sigma = \emptyset$).

B. Wir behaupten, dass (b) aus (c) folgt. Gelte also (c) .

Sei ϕ eine logische Folgerung von Σ .

Dann gibt es keine Bewertung, welche alle $\sigma \in \Sigma \cup \{(\neg\phi)\}$ wahr macht.

Wegen (c) ist dann $\Sigma \cup \{(\neg\phi)\}$ inkonsistent, also gibt es ein ψ sodass ψ und $(\neg\psi)$ aus $\Sigma \cup \{(\neg\phi)\}$ bewiesen werden können.

Aus dem Ableitungstheorem folgt nun, dass $((\neg\phi) \to \psi)$ und $((\neg\phi) \to (\neg\psi))$ aus Σ bewiesen werden können.

Weil $(((\neg\phi) \to \psi) \to (((\neg\phi) \to (\neg\psi)) \to \phi))$ ein Satz ist (Beweis als Übung) ergibt sich durch zweimalige Anwendung von Modus Ponens, dass ϕ aus Σ bewiesen werden kann.

Die andere Richtung von (b) wurde bereits in A. vermerkt.

C. Beweis von (c) .

Eine Richtung wurde bereits in A. vermerkt.

Sei nun Σ konsistent.

Wir zeigten in B. : $(*)$ Können ψ und $(\neg\psi)$ aus $\Sigma \cup \{(\neg\phi)\}$ hergeleitet werden, dann kann ϕ aus Σ hergeleitet werden.

Wir behaupten nun, dass für jede Formel ϕ entweder $\Sigma \cup \{\phi\}$ oder $\Sigma \cup \{(\neg\phi)\}$ konsistent ist.

Wären nämlich beide inkonsistent, dann könnten wegen $(*)$ sowohl ϕ als auch $(\neg\phi)$ aus Σ hergeleitet werden, ein Widerspruch!

Wir erweitern nun Σ zu einer maximalen konsistenten Menge Σ^+ .

Da die Menge aller Formeln abzählbar ist, können wir eine Aufzählung aller Formeln in der Form ϕ_0 , ϕ_1 , ϕ_2 , ... betrachten.

Wir fügen im n-ten Schritt die Formel ϕ_n hinzu, wenn das Ergebnis konsistent ist, ansonsten fügen wir $(\neg\phi_n)$ hinzu.

Die resultierende Menge Σ^+ hat die Eigenschaft, dass für jede Formel ϕ gilt, dass $\phi \in \Sigma^+$ oder $(\neg\phi) \in \Sigma^+$ (aber natürlich nicht für beide).

Nun definieren wir eine Bewertung durch

$$v(p_i) = \begin{cases} T & \text{wenn } p_i \in \Sigma^+ \\ F & \text{wenn } p_i \notin \Sigma^+ \end{cases}$$

Behauptung: $v(\phi) = T$ genau dann wenn $\phi \in \Sigma^+$.

Wir beweisen die Behauptung mittels Induktion über die Länge einer Formel.

Ist die Länge gleich 1 , dann liegt eine Aussagenvariable vor und die Behauptung ist erfüllt.

Wenn ϕ mehr als ein Symbol hat,

Fall 1: ϕ hat die Form $(\neg\psi)$.

$v(\phi) = T \Leftrightarrow v(\psi) = F \overset{\text{Ind.vor.}}{\Leftrightarrow} \psi \notin \Sigma^+ \Leftrightarrow (\neg\psi) = \phi \in \Sigma^+$

Fall 2: ϕ hat die Form $(\psi \to \theta)$.

$v(\phi) = T \Leftrightarrow v(\psi) = F$ oder $v(\theta) = T \overset{\text{Ind.vor.}}{\Leftrightarrow}$

$\psi \notin \Sigma^+$ oder $\theta \in \Sigma^+ \Leftrightarrow (\neg\psi) \in \Sigma^+$ oder $\theta \in \Sigma^+$

Annahme: $v(\phi) = T$ und $\phi \notin \Sigma^+$.

$((\neg\psi) \to (\psi \to \theta))$ ist ein Satz (siehe Beispiel vorher), ebenso

$(\theta \to (\psi \to \theta))$ (Axiom (A1)).

Mittels Modus Ponens kann damit ϕ aus Σ^+ hergeleitet werden. Weil $\phi \notin \Sigma^+$ ergibt sich ein Widerspruch zur Konsistenz von Σ^+ .

Also wenn $v(\phi) = T$ dann $\phi \in \Sigma^+$.

Annahme: $v(\phi) = F$ und $\phi \in \Sigma^+$.

Dann ist $\psi \in \Sigma^+$ und $(\neg\theta) \in \Sigma^+$.

Die Formel $(\psi \to ((\neg\theta) \to (\neg(\psi \to \theta))))$ ist (ohne Beweis) ein Satz, und offenbar gleich der Formel $(\psi \to ((\neg\theta) \to (\neg\phi)))$.

Mittels Modus Ponens kann damit $(\neg\phi)$ aus Σ^+ hergeleitet werden. Weil

$\phi \in \Sigma^+$ ergibt sich wieder ein Widerspruch zur Konsistenz von Σ^+ .

Insgesamt herhalten wir damit $v(\phi) = T \Leftrightarrow \phi \in \Sigma^+$.

Weil $\Sigma \subseteq \Sigma^+$ gibt es folglich eine Bewertung mit $v(\sigma) = T$ für alle $\sigma \in \Sigma$. $\square$

Bemerkung. Sei eine Formel ϕ gegeben. Wann ist ϕ ein Satz, i.e. herleitbar?

Gemäß dem Vorhergehenden bestimmen wir die Wahrheitstafel von ϕ und überprüfen, ob ϕ eine Tautologie ist.

Bemerkung. Eine Menge Σ von Formeln heißt **erfüllbar**, wenn es eine Bewertung v gibt mit $v(\sigma) = T$ für alle $\sigma \in \Sigma$.

Gemäß dem Vorhergehenden ist damit Σ konsistent genau dann, wenn Σ erfüllbar ist.

Satz. (**Kompaktheitstheorem**)

Wenn jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar ist, dann ist auch Σ erfüllbar.

Beweis. Σ erfüllbar heißt gemäß vorher, dass kein Widerspruch aus Σ hergeleitet werden kann. Der Beweis eines Widerspruchs besteht aus endliche vielen Formeln. Wir würden einen Widerspruch zur Annahme, dass jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar ist, erhalten. $\square$

Bemerkung. Der Korrektheits- und Vollständigkeitssatz bleibt gültig, wenn wir eine wohlgeordnete Menge von Aussagenvariablen verwenden.

. . . . . .

Boolesche Algebren

George Boole: Die 'Gesetze des Denkens' sollen ein Zweig der Algebra

werden ("An investigation of the Laws of Thought").

Definition. Eine **Boolesche Algebra** ist eine Menge B mit zwei binären Operationen $\wedge$ und $\vee$, einer unären Operation $'$ und zwei verschiedenen Konstanten 0 und 1 sodass gilt

- Assoziativität

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \quad , \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

- Kommutativität

$x \vee y = y \vee x \quad , \quad x \wedge y = y \wedge x$

- Distributivität

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \quad , \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

- Idempotenz

$x \vee x = x \quad , \quad x \wedge x = x$

- Absorptionsgesetz

$x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y)$

- Regeln von De Morgan

$(x \vee y)' = x' \wedge y' \quad , \quad (x \wedge y)' = x' \vee y'$

- Identität

$x \vee 0 = x \quad , \quad x \wedge 1 = x$

- Komplementarität

$x \vee y = 1$ und $x \wedge y = 0$ genau dann wenn $y = x'$

Bemerkung. Obige Forderungen sind redundant, d.h. nicht alle voneinander unabhängig.

Beispiele.

1) Sei U eine Menge und $B = \mathcal{P}U$ mit

$x \vee y = x \cup y \;\;,\;\; x \wedge y = x \cap y \;\;,\;\; x' = U \setminus x \;\;,\;\; 1 = U \;\;,\;\; 0 = \emptyset$

(**Boolesche Mengenalgebra**)

2) Sei $B = \{S \subseteq \mathbb{N} \,:\, S \text{ oder } \mathbb{N} \setminus S \text{ ist endlich}\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Dann ist B eine Unteralgebra von $\mathcal{P}\mathbb{N}$.

3) Sei $X = \{0, 1\}$ mit

$0 \wedge 0 = 0 \;\;,\;\; 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0 \;\;,\;\; 1 \wedge 1 = 1$

$0 \vee 0 = 0 \;\;,\;\; 0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \;\;,\;\; 1 \vee 1 = 1$

$0' = 1 \;\;,\;\; 1' = 0$

4) Die Familie $RO(X, \tau)$ der regulär offenen Mengen in einem topologischen Raum (X, τ) bilden eine Boolesche Algebra.

Wir betrachten nun die Menge aller Formeln der Aussagenlogik bei einer gegebenen Menge von Aussagenvariablen.

Zwei Formeln ϕ und ψ heißen **logisch äquivalent** , $\phi \sim \psi$, wenn $v(\phi) = v(\psi)$ für alle Bewertungen v gilt.

Dies ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Formeln.

Sei $[\phi]$ die Äquivalenzklasse von ϕ .

Offenbar gilt: Ist $\phi \sim \phi'$ und $\psi \sim \psi'$, dann ist

$(\phi \vee \psi) \sim (\phi' \vee \psi')$ und $(\phi \wedge \psi) \sim (\phi' \wedge \psi')$.

Damit sind die folgenden Operationen wohldefiniert!

$[\phi] \vee [\psi] = [(\phi \vee \psi)] \quad , \quad [\phi] \wedge [\psi] = [(\phi \wedge \psi)] \quad , \quad [\phi]' = [(\neg\phi)]$

Weiters sei 1 die Äquivalenzklasse der Tautologien, und 0 die Äquivalenzklasse der Widersprüche.

Satz. Wir erhalten damit eine Boolesche Algebra $B(P)$, wobei P die Menge der Aussagenvariablen bezeichnet.

Der Beweis erfolgt mittels Wahrheitstafeln. Dies ist der **Boolesche Aussagenkalkül**.

Sei P eine Menge von Aussagenvariablen und $V(P)$ die Menge der Bewertungen.

Zu jeder Formel ϕ gibt es eine zugehörige **Auswertungsfunktion**

$e_\phi : V(P) \to \{T, F\}$, $e_\phi(v) = v(\phi)$

Bemerkung. Logische äquivalente Formeln habe dieselbe Auswertungsfunktion (und umgekehrt).

Somit entspricht einer Äquivalenzklasse $[\phi]$ genau eine Auswertungsfunktion $V(P) \to \{T, F\}$ bzw. eine Teilmenge von $V(P)$ mittels der Identifizierung

$f : V(P) \to \{T, F\} \leftrightarrow \{v \in V(P) : f(v) = T\}$

Sei x_ϕ jene Teilmenge, welcher ϕ entspricht, i.e.

$v \in x_\phi$ genau dann wenn $v(\phi) = T$.

Nun gilt

$v \in x_{(\phi \vee \psi)} \Leftrightarrow v((\phi \vee \psi)) = T \Leftrightarrow v(\phi) = T$ oder $v(\psi) = T \Leftrightarrow$

$v \in x_\phi$ oder $v \in x_\psi \Leftrightarrow v \in x_\phi \cup x_\psi$

Analog zeigt man: $x_{(\phi \wedge \psi)} = x_\phi \cap x_\psi$, $x_{(\neg \phi)} = V(P) \setminus x_\phi$

Ist ϕ eine Tautologie, dann $x_\phi = V(P)$. Ist ϕ ein Widerspruch, dann $x_\phi = \emptyset$.

Satz. Wir erhalten damit mittels $[\phi] \mapsto x_\phi$ einen Isomorphismus zwischen $B(P)$ und einer Unteralgebra von $\mathcal{P}V(P)$.

Sei $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ endlich. Dann ist $|V(P)| = 2^n$, weil jede Bewertung durch die Werte auf P eindeutig bestimmt ist.

Des weiteren ist $|\mathcal{P}V(P)| = 2^{2^n}$.

Sei v eine Bewertung und sei

$$q_i = \begin{cases} p_i & \text{wenn } v(p_i) = T \\ (\neg p_i) & \text{wenn } v(p_i) = F \end{cases}$$

Betrachten wir die "Pseudoformel" $\tau_v = (q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n)$, dann gilt

$v(\tau_v) = T$ und $v^*(\tau_v) = F$ für $v^* \neq v$.

Sei nun x eine nichtleere Teilmenge von $V(P)$ und sei $\phi_x = \bigvee\limits_{v \in x} \tau_v$ (Disjunktion aller Terme τ_v für $v \in x$) .

Dann gilt $v(\phi_x) = T$ genau dann, wenn $v \in x$. (ϕ_x ist in der sogenannten **disjunktiven Normalform**).

Damit erhalten wir in diesem Fall einen Isomorphismus von $B(P)$ **auf ganz** $\mathcal{P}V(P)$!

Bemerkung. Ist P abzählbar, dann ist $B(P)$ abzählbar, und es kann keinen Isomorphismus auf $\mathcal{P}V(P)$ geben weil

$|\mathcal{P}V(P)| > |V(P)| = |\mathcal{P}P| > |P|$ (Satz von Cantor)

Ein Ring mit Einselement, wo jedes Element x die Eigenschaft $x^2 = x$ besitzt, heißt **Boolescher Ring**.

Satz.

1) Sei B eine Boolesche Algebra.

Setze $x + y = (x \vee y) \wedge (x \wedge y)'$, $x \cdot y = x \wedge y$.

Dann erhalten wir einen Booleschen Ring mit 0 und 1 .

2) Sei R ein Boolescher Ring mit 0 und 1 .

Setze $x \vee y = x + y + x \cdot y \;\;,\;\; x \wedge y = x \cdot y \;\;,\;\; x' = 1 + x$

Dann erhalten wir eine Boolesche Algebra.

3) Obige Konstruktionen sind zueinander invers.

. . . . . .

Logik 1. Ordnung

Um mathematische Strukturen zu formalisieren, werden komplexere formale Systeme benötigt.

Es sollen Aussagen über mathematische Strukturen möglich sein, wo Relationen, Funktionen (Operationen) und ausgezeichnete Elemente vorkommen (wie es etwa bei Gruppen oder Vektorräumen der Fall ist).

Des weiteren soll die Möglichkeit der **Quantifizierung** über Elemente der Struktur gegeben sein (Logik bzw. Sprache 1. Ordnung).

Bemerkung. Bei **Logiken höherer Ordnung** kann auch über Teilmengen der Menge, welcher der Struktur zugrundeliegt ("Domain of discourse"), quantifiziert werden.

Bei **infinitären Logiken** können die Formeln auch unendliche Disjunktionen oder Quantifizierungen beinhalten.

Ein Gegenstand mathematischer Untersuchung (z.B. Gruppe, geordnete Menge etc.) besteht üblicherweise aus einer Menge X , auf der gewisse n-stellige Operationen $X^n \to X$, n-stellige Relationen (Teilmengen von X^n) und spezielle ausgezeichnete Elemente bzw. Konstanten definiert sind.

Die **Sprache** der Logik 1. Ordnung für ein spezielles Gebiet enthält Symbole für die Operationen, Relationen und Konstanten.

Bemerkung. Man beachte allerdings den Unterschied zwischen einem Operationssymbol und der Operation selbst! Manche Autoren verwenden deshalb unterschiedliche Symbole dafür.

Wir haben weiters **Variablensymbole**, die sich auf Elemente der Struktur beziehen,

$x_0, x_1, x_2, \ldots$ bzw. $x, y, z, \ldots$

und, wie bereits erwähnt, Symbole für auftretende Operationen, Relationen und Konstanten

sowie **logische Symbole**

- Gleichheitszeichen $=$
- Verknüpfungssymbole $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- Quantoren $\exists$, $\forall$
- Klammern (,)

Ein **Term** (Ausdruck) wird rekursiv definiert:

- Ein String mit einer Variablen ist ein Term
- Ein String mit einem Konstantensymbol ist ein Term
- Ist f eine n-stellige Operation und sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ein Term.

Beispiel.

Sei f eine zweistellige Operation, g eine einstellige Operation, c, d Konstantensymbole und x, y Variablensymbole. Dann ist

$f(g(c), f(g(f(d, y)), g(x)))$ ein Term.

Würden wir die Symbolik $f(a, b) = a + b$, $g(z) = -z$ verwenden, hätte dieser Term die Form

$(-c) + ((-(d + y)) + (-x))$.

Nun definieren wir **atomare Formeln** ebenfalls rekursiv:

- Seien R ein n-stelliges Relationssymbol und $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme, dann ist $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ eine atomare Formel.

- Sind t_1, t_2 Terme, dann ist $t_1 = t_2$ eine atomare Formel.

Beispiel.

Sei R ein zweistelliges Relationssymbol, f eine zweistellige Operation, g eine einstellige Operation und a, b, c, d Variablensymbole.

Dann sind $f(a, g(b))$ und $f(g(c), d))$ Terme, und

$R(f(a, g(b)), f(g(c), d)))$ ist eine atomare Formel.

Verwenden wir für f und g die Symbolik von vorher, und schreiben $R(x, y)$ als $x < y$, dann erhalten wir

$a + (-b) < (-c) + d$

Formeln sind nun erklärt durch

- Atomare Formeln sind Formeln.
- Sind ϕ, ψ Formeln, dann auch

$(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\neg\phi)$, $(\phi \to \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$

- Ist ϕ eine Formel und x ein Variablensymbol, dann sind

$(\exists x)\phi$ und $(\forall x)\phi$ ebenfalls Formeln.

Bemerkung. Die Wohlgeformtheit von Termen und Formeln kann "mechanisch" entschieden werden (mittels eines "Baumes").

Eine Formel ϕ ist eine **Teilformel** von ψ , wenn bei der rekursiven Konstruktion von ψ die Formel ϕ auftaucht.

Der **Bereich eines Quantors** in einer Formel ist die Teilformel $(\forall x)\phi$ bzw. $(\exists x)\phi$, in der er vorkommt, i.e. die Teilformel ϕ wird quantifiziert über die Variable x .

Das Vorkommen einer Variablen x in einer Formel heißt **gebunden**, wenn es im Bereich eines Quantors ist, ansonsten spricht man von einem **freien** Vorkommen.

Beispiel. Bei der Formel $(\exists x)(x < y)$ ist das Vorkommen von x gebunden, und das Vorkommen von y frei.

Eine Formel ϕ heißt ein **Satz**, wenn es **kein** freies Vorkommen von Variablen gibt.

Beispiel.

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)\ (\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x,\mu(y,z)))$ ist ein Satz.

Zur Semantik:

Die informellen Bezeichnungen für die Symbole $\neg$, $\leftrightarrow$, $\forall$ etc. deuten darauf hin, dass eine Formel etwas über eine Struktur aussagen soll.

Eine gegebene **Sprache 1. Ordnung** $\mathcal{L}$ ist vollständig bestimmt durch die vorkommenden Relations-, Operations- und Konstantensymbole (die anderen Symbole kommen in allen Sprachen 1. Ordnung vor).

Eine **$\mathcal{L}$-Struktur** ist eine nichtleere Menge V , wobei es zu jedem n-stelligen Operations- bzw. Relationssymbol eine n-stellige Operation bzw. Relation in V gibt, und zu jedem Konstantensymbol in $\mathcal{L}$ eine Konstante in V .

(Man achte dabei auf den Unterschied zwischen einem Relationssymbol und der tatsächlichen Relation in V etc., weil oft dasselbe Symbol verwendet wird.)

Eine Formel in der Sprache soll etwas "Sinnvolles" in Strukturen über der Sprache aussagen. Die "Wahrheit" einer Formel hängt dabei davon ab, welche Werte den Variablen zugeordnet werden.

Eine **Bewertung** v **von** $\mathcal{L}$ besteht aus einer $\mathcal{L}$-Struktur V und einer Folge $(v_0, v_1, v_2, \ldots)$ von Elementen von V , welche den Variablen zugeordnet werden können.

Eine Bewertung kann gedacht werden als Abbildung von der Menge der Variablensymbole in die Menge V mit $v(x_i) = v_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Diese Abbildung wird dann geeignet fortgesetzt zu einer Abbildung der Menge der Terme von $\mathcal{L}$ nach V , und dann von der Menge der Formeln von $\mathcal{L}$

in die Menge $\{T, F\}$. Alle diese Abbildungen werden mit dem Symbol v bezeichnet.

Für **Terme** definieren wir:

- Ist x_i ein Variablensymbol, dann $v(x_i) = v_i$ (siehe zuvor).

- Ist c ein Konstantensymbol, dann ist $v(c)$ das korrespondierende Element von V .

- Ist f ein n-stelliges Operationssymbol und sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ Terme (sodass $v(t_1), v(t_2), \ldots, v(t_n)$ bereits vorliegende Elemente von V sind), dann ist $v(f(t_1, t_2, \ldots, t_n))$ das Ergebnis, wenn die entsprechende n-stellige Operation in V auf die Argumente $v(t_1), v(t_2), \ldots, v(t_n)$ angewandt wird.

Für **atomare Formeln** definieren wir:

- Ist R ein n-stelliges Relationssymbol und sind $t_1, t_2, \ldots, t_n$ (bereits bewertete) Terme, dann ist $v(R(t_1, t_2, \ldots, t_n)) = T$ genau dann, wenn die korrespondierende Relation in V für die Elemente $v(t_1), v(t_2), \ldots, v(t_n)$ von V erfüllt ist.

- $v((t_1 = t_2)) = T$ genau dann, wenn $v(t_1) = v(t_2)$ (als Elemente von V).

Für **Formeln** definieren wir zuerst

Definition. Zwei Bewertungen v und v' sind **i-nahe**, wenn $v(x_j) = v'(x_j)$ für $j \neq i$. D.h., die beiden Bewertungen unterscheiden sich höchstens im Wert für x_i . Klarerweise ist v i-nahe zu v .

- Ist ϕ eine atomare Formel, $v(\phi)$ siehe vorher.

- $v(\phi \vee \psi) = T$ genau dann wenn $v(\phi) = T$ oder $v(\psi) = T$.

- $v(\phi \wedge \psi) = T$ genau dann wenn $v(\phi) = T$ und $v(\psi) = T$.

- $v((\neg\phi)) = T$ genau dann wenn $v(\phi) = F$.

- $v(\phi \to \psi) = T$ genau dann wenn es nicht der Fall ist, dass $v(\phi) = T$

und $v(\psi) = F$.

• $v(\phi \leftrightarrow \psi) = T$ genau dann wenn $v(\phi) = v(\psi)$.

• $v((\forall x_i)\phi) = T$ genau dann wenn für jede Bewertung v' , welche i-nahe zu v ist, gilt dass $v'(\phi) = T$.

• $v((\exists x_i)\phi) = T$ genau dann wenn es eine i-nahe Bewertung v' gibt mit $v'(\phi) = T$.

Bemerkungen. Sei v eine Bewertung.

• $(\forall x)\phi$ ist wahr, wenn ϕ wahr ist und für jeden Wert von x wahr bleibt.

• Ist $(\exists x)\phi$ wahr, dann muss ϕ nicht notwendigerweise wahr sein (unter v), kann aber durch eine spezielle Wahl von v' wahr gemacht werden.

• $v((\forall x)\phi)$ und $v((\exists x)\phi)$ sind unabhängig davon, welchen Wert x durch v erhält.

• Für eine Formel ϕ hängt folglich $v(\phi)$ nur davon ab, welche Werte jene Variable erhalten, welche frei vorkommen.

• Ist speziell ϕ ein Satz, dann ist $v(\phi)$ unabhängig von v . ϕ ist entweder wahr oder falsch in der Struktur.

Definition. Ist ein Satz ϕ wahr in der Struktur M , dann schreibt man auch

$M \models \phi$ (und sagt, M ist ein **Modell** für ϕ .)

Die **Theorie** einer Struktur M ist die Menge aller Sätze, welche in M wahr sind. Man schreibt $\mathrm{Th}(M)$.

Beispiel. Die betrachtete Sprache möge ein binäres Operationssymbol μ , ein unäres Operationssymbol i , und ein Konstantensymbol e enthalten. Dann sind

$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\mu(\mu(x,y),z) = \mu(x,\mu(y,z)))$

$(\forall x)((\mu(x,e) = x) \wedge (\mu(e,x) = x))$

$(\forall x)((\mu(x,i(x)) = e) \wedge (\mu(i(x),x) = e))$

Sätze.

M ist ein Modell für diese drei Sätze genau dann, wenn M eine Gruppe ist. Die Operationen μ und i sind die Gruppenverknüpfung und die Inversion, und e ist das neutrale Element.

Das formale System einer Logik 1. Ordnung besteht wiederum aus einem

- Alphabet
- Axiomen (sind gewisse Formeln)
- Ableitungsregeln (eine endliche Menge von Formeln als Input liefert eine Formel als Output)

Ein **Beweis** ist eine endliche Folge von Formeln, wo jedes Folgenglied ein Axiom ist, oder der Output einer Ableitungsregel dessen Input vorher in der Folge vorkommt.

Ein **Theorem** ist die letzte Zeile eines Beweises (wurde früher als Satz bezeichnet).

Beweis von ϕ aus Σ: Ein Beweis einer Formel ϕ aus einer Menge Σ von Formeln ist eine endliche Folge von Formeln, wo jedes Folgenglied ein Axiom ist, ein Element von Σ ist, oder der Output einer Ableitungsregel dessen Input vorher in der Folge vorkommt.

(Beispiel. Sei Σ die Menge der Axiome für eine Gruppe. Dann sollen die Formeln, die aus Σ hergeleitet werden können, die Theoreme (1. Ordnung) der Gruppentheorie sein.)

Bemerkung. Bevor wir die Axiome und Ableitungsregeln erwähnen, weisen wir darauf hin, dass die Verknüpfungssymbole $\neg$ und $\rightarrow$, sowie der Quantor $\forall$ ausreichend sind.

$(\phi \vee \psi)$ ist äquivalent zu $((\neg\phi) \to \psi)$

$(\phi \wedge \psi)$ ist äquivalent zu $(\neg(\phi \to (\neg\psi)))$

$(\phi \leftrightarrow \psi)$ ist äquivalent zu $(\neg((\phi \to \psi) \to (\neg(\psi \to \phi))))$

$(\exists x)\phi$ ist äquivalent zu $(\neg((\forall x)(\neg\phi)))$

(Dabei heißen zwei Formeln 'äquivalent' wenn für jede Bewertung in irgendeiner Struktur der Wahrheitswert gleich ist.)

Wir kommen nun zu den **Axiomen** für die Logik 1. Ordnung.

Dabei sind $\phi, \psi, \theta, \ldots$ Formeln, $t, u, v, \ldots$ Terme und $x, y, \ldots$ Variablensymbole.

Die Notation $\phi[t/x]$ meint das Ergebnis, wenn für jedes **freie** Vorkommen von x in ϕ der Term t eingesetzt wird.

Man folgt dabei der Konvention dass eine derartige Substitution nur dann gemacht wird, wenn es keine Variable $y \neq x$ gibt, wo y in t vorkommt und x ein freies Vorkommen im Bereich eines Quantors $(\forall y)$ in ϕ hat.

Nicht erlaubt wäre etwa: $\phi:\ (\forall y)(x + y = z)$ und $t:\ y + y$.

(A1) $(\phi \to (\psi \to \phi))$

(A2) $((\phi \to (\psi \to \theta)) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta)))$

(A3) $(((\neg\phi) \to (\neg\psi)) \to (\psi \to \phi))$

(A4) $((\forall x)\phi \to \phi[t/x])$

(A5) $((\forall x)(\phi \to \psi) \to (\phi \to (\forall x)\psi))$, wenn es kein freies Vorkommen von x in ϕ gibt.

(E1) $(t = t)$

(E2) $((t = u) \to (u = t))$

(E3) $((t = u) \to ((u = v) \to (t = v)))$

(E4) $((t = u) \to (\phi[t/x, t/y] \to \phi[t/x, u/y]))$

(Bemerkung. (E4) kann so verstanden werden: Werden in einer Formel einige Vorkommen eines Terms durch einen gleichen Term ersetzt, dann ist die resultierende Formel logisch äquivalent zur Ausgangsformel.)

Bemerkung. Keine Formel der Logik 1. Ordnung kann "erzwingen", dass " = " die tatsächliche Gleichheit ist.

Hier wird allerdings festgelegt, dass " = " als tatsächliche Gleichheit interpretiert wird.

Die **Ableitungsregeln** sind:

(R1) (Modus Ponens) Aus ϕ und $(\phi \to \psi)$ leite ψ ab.

(R2) (Verallgemeinerung) Aus ϕ leite $(\forall x)\phi$ ab.

(x ist dabei ein Variablensymbol)

Bemerkung.

Im Falle einer Herleitung aus Σ darf bei Anwendung von (R2) x kein freies Vorkommen in einer Formel von Σ haben.

In der Praxis tritt dieser Fall meist nicht auf, weil Σ aus Sätzen besteht, wo "$\forall$" über alle relevanten Variablen auftritt (siehe Axiome für die Gruppentheorie).

Des weiteren sei erwähnt, dass zwar die Axiome "mechanisch" erkannt werden können, allerdings nicht jede Menge von Sätzen (dies spielt eine Rolle beim Gödel'schen Unvollständigkeitssatz für die Arithmetik).

Wie man an den Axiomen ersieht, ist die Aussagenlogik, die wir zuvor diskutiert haben, "inkludiert" in der Logik 1. Ordnung. Diesbezüglich erwähnen wir

Satz. Sei Θ eine Tautologie der Aussagenlogik mit Aussagenvariablen

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ und seien $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ Formeln (1. Ordnung).

Ist Φ das Ergebnis, wenn in Θ p_i durch ϕ_i ersetzt wird für jedes i, dann ist Φ ein Theorem.

(Ersetzen wir in einem Beweis von Θ p_i durch ϕ_i, erhalten wir einen Beweis von Φ, der nur (A1)-(A3) und Modus Ponens verwendet. Φ nennt man dann auch **Aussagentautologie**.)

Satz. (Ableitungstheorem)

Wenn ϕ aus einer Menge von Formeln $\Sigma \cup \{\psi\}$ hergeleitet werden kann, dann kann $(\psi \to \phi)$ aus Σ hergeleitet werden.

Beweis.

Die Fälle "ϕ ist ein Axiom", "$\phi \in \Sigma$" und "$\phi = \psi$" werden genauso wie im Beweis des Ableitungstheorems der Aussagenlogik behandelt.

Damit können wir annehmen, dass ϕ aus früheren Formeln durch Anwendung einer Ableitungsregel hergeleitet wird.

Der Fall, dass ϕ mittels Modus Ponens hergeleitet wird, wird wie früher behandelt.

Es verbleibt zu betrachten, dass ϕ die Form $(\forall x)\theta$ hat (wobei x nicht frei vorkommt in ψ und in irgendeiner Formel von Σ). ϕ wurde also mittels Verallgemeinerung aus θ hergeleitet.

Mittels Induktion folgt dann, dass $(\psi \to \theta)$ aus Σ hergeleitet werden kann.

Nun

$\Sigma \vdash \quad (\forall x)(\psi \to \theta)$ (Verallgemeinerung)

$\Sigma \vdash \quad ((\forall x)(\psi \to \theta) \to \ (\psi \to (\forall x)\theta))$ (Axiom (A5))

$\Sigma \vdash \quad (\psi \to (\forall x)\theta)$ (Modus Ponens) $\quad \square$

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache 1. Ordnung. Eine Formel ϕ in $\mathcal{L}$ heißt **logisch**

gültig, wenn für **jede** $\mathcal{L}$-Struktur M und **jede** Bewertung in M, ϕ den Wert T erhält.

Bemerkung.

Ist ϕ ein Satz (Formel ohne freie Variablen), dann ist gemäß vorher ϕ logisch gültig genau dann, wenn $M \models \phi$ für **jede** $\mathcal{L}$-Struktur M.

Zum Abschluss erwähnen wir noch ohne Beweis

Satz. (**Korrektheits- und Vollständigkeitssatz**)

Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache 1. Ordnung mit endlich vielen oder abzählbar vielen Operations-, Relations- und Konstantensymbolen.

(1) Eine Formel ϕ ist logisch gültig genau dann, wenn sie ein Theorem ist.

(2) Eine Formel ϕ ist logische Konsequenz einer Menge Σ von Formeln genau dann wenn ϕ aus Σ hergeleitet werden kann.

(3) Eine Menge Σ von Formeln ist konsistent genau dann wenn sie erfüllbar ist (d.h. es gibt eine $\mathcal{L}$-Struktur M und eine Bewertung v, welche jeder Formel in Σ den Wert T zuordnet).

Bemerkung. Die Aussagen des Satzes bleiben gültig für eine Sprache, bei der die Mengen der Relationssymbole, Operationssymbole und Konstantensymbole wohlgeordnet sind.

Bemerkung. Bei der Theorie 1. Ordnung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen wird für jedes $c \in \mathbb{R}$ ein unäres Operationssymbol benötigt (Skalarmultiplikation mit c).

Damit wäre die Sprache überabzählbar!

Mit dem Auswahlaxiom (welches äquivalent zum Wohlordnungssatz ist) kann allerdings jede Menge wohlgeordnet werden. Damit gelten auch hier Korrektheits- und Vollständigkeitssatz.