Konstruktion der reellen Zahlen

Zur Wiederholung: Eine Menge K (mit mindestens zwei Elementen) heißt **Körper**, wenn für beliebige Elemente $x, y \in K$ eindeutig eine Summe $x+y \in K$ und ein Produkt $x \cdot y \in K$ definiert ist, sodass $(K, +)$ eine abelsche Gruppe ist, wobei das neutrale Element mit 0 bezeichnet wird und das zu x inverse Element mit $-x$. Des weiteren ist $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ eine abelsche Gruppe, wobei das neutrale Element mit 1 bezeichnet wird, und das zu x inverse Element mit x^{-1} bzw. $\frac{1}{x}$. Darüberhinaus gilt das Distributivgesetz $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Ein Körper K heißt **geordnet**, wenn eine Beziehung > 0 definiert ist, sodass für jedes $x \in K$ genau eine der Beziehungen $x = 0$, $x > 0$ oder $-x > 0$ erfüllt ist. Des weiteren folgt aus $x, y > 0$ dass $x + y > 0$ und $x \cdot y > 0$ ist.

(Im Falle $x > 0$ heißt x positiv, im Falle $-x > 0$ heißt x negativ.)

Damit können nun die Beziehungen $x > y$ bzw. $x \geq y$ definiert werden, falls nämlich $x - y > 0$ bzw. $x - y \geq 0$. Analog werden $x < y$ bzw. $x \leq y$ definiert.

Daraus folgt dann, dass stets genau eine der Beziehungen

$x = y$, $x < y$, $y < x$ gilt.

Weiters gilt $x < y$, $y < z \Rightarrow x < z$, $x < y \Rightarrow x + z < y + z$ und

$x < y$, $z > 0 \Rightarrow xz < yz$.

. . . .

Wir setzen voraus, dass bereits der geordnete Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen vorliegt bzw. konstruiert wurde.

$\mathbb{Q}$ ist allerdings in mancherlei Hinsicht unbefriedigend, weil

1) es Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ gibt, welche **nicht** in $\mathbb{Q}$ konvergieren, wie etwa die Folge $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}$.

2) etwa die Gleichung $x^2 = 2$ **nicht** in $\mathbb{Q}$ gelöst werden kann.

Definition. Ein geordneter Körper K heißt **vollständig** wenn jede Cauchy-Folge in K konvergiert, d.h. einen Grenzwert in K besitzt.

Es stellt sich nun die Frage, ob $\mathbb{Q}$ zu einem größeren geordneten Körper erweitert werden kann, der vollständig ist und wo jede Gleichung der Form $x^n = a$, $a \in \mathbb{Q}$, $a \geq 0$ lösbar ist.

Dieses Problem wurde zuerst von Dedekind (1831 - 1916) gelöst. Er benutzte für seine Konstruktion die nach ihm benannten Dedekind'schen Schnitte.

Bei einer weiteren Konstruktionsmöglichkeit kommen Intervallschachtelungen zum Tragen.

Wir arbeiten hier mittels Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$. Dazu führen wir auf der Menge aller Cauchy-Folgen aus $\mathbb{Q}$ folgende Relation ein.

Definition. Zwei Cauchy-Folgen (x_n) , (y_n) aus $\mathbb{Q}$ heißen **äquivalent**, $(x_n) \sim (y_n)$, wenn $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$.

Es ist elementar nachzuweisen, dass obige Relation eine Äquivalenzrelation ist. Anschaulich bedeutet dies, dass die beiden Cauchy-Folgen dieselbe "Stelle" beschreiben.

Bemerkung. Ist (y_n) eine Teilfolge von (x_n) , dann gilt $(x_n) \sim (y_n)$.

Wir haben damit eine Klasseneinteilung auf der Menge aller Cauchy-Folgen aus $\mathbb{Q}$.

Die Äquivalenzklasse, welche zu einer gegebenen Folge (x_n) gehört, wird mit $C_{(x_n)}$ bezeichnet.

Ist (x_n) eine konstante Folge, also $x_n = x \in \mathbb{Q}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann bezeichnen wir die zugehörige Äquivalenzklasse mit $C_{(x)}$.

Die Äquivalenzklassen werden mit $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ bezeichnet.

Greifen wir aus einer Äquivalenzklasse X einen Repräsentanten (x_n) heraus, dann schreiben wir $(x_n) \in X$. Ist also $(x_n) \in X$, dann gilt $C_{(x_n)} = X$.

Definition. Eine reelle Zahl ist eine Äquivalenzklasse von Cauchy-Folgen rationaler Zahlen. Die Menge der reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Seien nun $(x_n) \sim (x'_n)$ und $(y_n) \sim (y'_n)$. Dann gilt $(x_n + y_n) \sim (x'_n + y'_n)$ sowie $(x_n \cdot y_n) \sim (x'_n \cdot y'_n)$.

Wir beweisen die zweite Aussage. Da Cauchy-Folgen beschränkt sind, gibt es ein positives $M \in \mathbb{Q}$ sodass $|x_n| \le M$, $|y'_n| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Weiters gibt es zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sodass $|x_n - x'_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$ und $|y_n - y'_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$ für alle $n > N_\varepsilon$.

Damit erhalten wir für alle $n > N_\varepsilon$

$$|x_n y_n - x'_n y'_n| = |x_n(y_n - y'_n) + y'_n(x_n - x'_n)| \le$$

$$\le |x_n||y_n - y'_n| + |y'_n||x_n - x'_n| < M\tfrac{\varepsilon}{2M} + M\tfrac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

Folglich ist $(x_n \cdot y_n) \sim (x'_n \cdot y'_n)$.

Folgerung. Für $X, Y \in \mathbb{R}$ sind damit die Operationen

$$X + Y = C_{(x_n)} + C_{(y_n)} = C_{(x_n + y_n)}$$

$$X \cdot Y = C_{(x_n)} \cdot C_{(y_n)} = C_{(x_n \cdot y_n)}$$

wohldefiniert.

Satz. Mit diesen Operationen bildet $\mathbb{R}$ einen Körper.

Das neutrale Element bzgl. der Addition ist $C_{(0)}$, und das inverse Element von $X = C_{(x_n)}$ ist $-X = C_{(-x_n)}$.

Das neutrale Element bzgl. der Multiplikation ist $C_{(1)}$.

Ist $X = C_{(x_n)} \in \mathbb{R}$, $X \neq 0$, dann gibt es ein $\delta \in \mathbb{Q}$, $\delta > 0$ und ein $N_\delta \in \mathbb{N}$ sodass $|x_n| \ge \delta$ für alle $n > N_\delta$.

Die Folge $(\widetilde{x}_n)$ mit $\widetilde{x}_n = \frac{1}{x_n}$ falls $x_n \neq 0$ und $\widetilde{x}_n = 0$ falls $x_n = 0$ ist ebenfalls eine Cauchy-Folge.

Setzen wir $X^{-1} = C_{(\widetilde{x}_n)}$ dann gilt $X \cdot X^{-1} = 1$. $\square$

Wir definieren als nächstes eine Ordnung auf $\mathbb{R}$.

Dazu nennen wir eine Cauchy-Folge (x_n) aus $\mathbb{Q}$ **positiv** , wenn ein $\delta \in \mathbb{Q}$, $\delta > 0$ und ein $N_\delta \in \mathbb{N}$ existiert mit $x_n \geq \delta$ für alle $n > N_\delta$.

Man sieht dann leicht: Ist eine Cauchy-Folge in einer Äquivalenzklasse positiv, dann alle anderen auch.

Definition. Sei $X \in \mathbb{R}$. Wir setzen $X > 0$ wenn alle Cauchy-Folgen aus X positiv sind.

Damit kann gezeigt werden

Satz. $\mathbb{R}$ ist ein geordneter Körper.

Beweis.

(a) Ist eine Cauchy-Folge (x_n) aus $\mathbb{Q}$ nicht äquivalent zu (0) , dann ist $(|x_n|)$ positiv.

Ansonsten würde es eine streng monoton steigende Folge (n_k) natürlicher Zahlen geben mit $|x_{n_k}| < \frac{1}{k}$, folglich $\lim\limits_{k \to \infty} x_{n_k} = 0$ und damit $(x_n) \sim (0)$, ein Widerspruch.

(b) Ist $(|x_n|)$ positiv, dann gibt es ein $\delta \in \mathbb{Q}$, $\delta > 0$ und ein $N_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| \geq \delta$ für alle $n > N_\delta$

und, weil (x_n) eine Cauchy-Folge ist, ein $N'_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|x_m - x_n| < \frac{\delta}{2}$ für alle $m, n > N'_\delta$.

Ist nun $m_0 > \max\{N_\delta, N'_\delta\}$, dann gilt

$$x_{m_0} \geq \delta \quad \text{oder} \quad -x_{m_0} \geq \delta \ .$$

Falls $x_{m_0} \geq \delta$ und $n > \max\{N_\delta, N'_\delta\}$, dann

$$x_{m_0} - x_n \leq |x_{m_0} - x_n| < \tfrac{\delta}{2} \quad \text{und}$$

$x_n > x_{m_0} - \frac{\delta}{2} \geq \frac{\delta}{2}$, also ist (x_n) positiv.

Falls $-x_{m_0} \geq \delta$ und $n > \max\{N_\delta, N'_\delta\}$, dann

$x_n - x_{m_0} \leq |x_{m_0} - x_n| < \frac{\delta}{2}$ und

$-x_n > -x_{m_0} - \frac{\delta}{2} \geq \frac{\delta}{2}$, also ist $(-x_n)$ positiv.

(c) Seien $X, Y \in \mathbb{R}$ mit $X > 0$, $Y > 0$ und $(x_n) \in X$ und $(y_n) \in Y$.

Dann gibt es ein $\delta \in \mathbb{Q}$, $\delta > 0$ und ein $N_\delta \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq \delta$, $y_n \geq \delta$ für alle $n > N_\delta$.

Folglich ist $x_n + y_n \geq \delta + \delta = 2\delta > 0$ und $x_n \cdot y_n > \delta^2 > 0$.

Also $X + Y > 0$ und $X \cdot Y > 0$. $\square$

Wir betrachten jetzt die Abbildung $F : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = C_{(x)}$.

Offenbar ist F injektiv, und folgende Eigenschaften können einfach gezeigt werden:

(1) $F(x + y) = F(x) + F(y)$

(2) $F(x \cdot y) = F(x) \cdot F(y)$

(3) $x < y \Rightarrow F(x) < F(y)$

Sind $X, Y \in \mathrm{Im}F$, dann

(4) $F^{-1}(X + Y) = F^{-1}(X) + F^{-1}(Y)$

(5) $F^{-1}(X \cdot Y) = F^{-1}(X) \cdot F^{-1}(Y)$

(6) $X < Y \Rightarrow F^{-1}(X) < F^{-1}(Y)$

Somit können wir von einer **Einbettung** von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ sprechen, weil es unerheblich ist, ob wir in $\mathbb{Q}$ nach den Rechenregeln von $\mathbb{Q}$ rechnen oder in $\mathrm{Im}F$ nach den Rechenregeln von $\mathbb{R}$. Aus diesem Grund bezeichnen wir auch eine reelle Zahl $X \in \mathrm{Im}F$ als rationale Zahl.

Als weitere Ergebnisse erwähnen wir

Satz. Sei $X \in \mathbb{R}$ mit $X > 0$. Dann gibt es eine rationale Zahl $Y \in \mathbb{R}$ mit $0 < Y < X$.

Beweis. Wähle $(x_n) \in X$. Dann gibt es ein $\delta \in \mathbb{Q}$, $\delta > 0$ und ein $N_\delta \in \mathbb{N}$ mit $x_n \geq \delta$ für alle $n > N_\delta$.

Die Cauchy-Folge $(x_n - \frac{\delta}{2})$ ist dann ebenfalls positiv. Setze $Y = C_{(\frac{\delta}{2})}$. Dann ist Y rational und positiv.

Weiters ist $X - Y = C_{(x_n - \frac{\delta}{2})}$, und damit $0 < Y < X$. $\square$

Satz.

(1) Für alle $x \in \mathbb{Q}$ gilt $|F(x)| = F(|x|)$,

(2) Für alle $X \in \mathrm{Im}F$ gilt $|F^{-1}(X)| = F^{-1}(|X|)$.

Im abschließenden Teil werden wir zeigen, dass $\mathbb{R}$ vollständig ist. Dies geschieht in mehreren Schritten.

Satz. Sei (x_n) eine Folge aus $\mathbb{Q}$, und sei $X_n = F(x_n)$ für alle n .

Dann ist (x_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ genau dann, wenn (X_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist.

Beweis.

(1) Sei (x_n) eine Folge aus $\mathbb{Q}$. Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ gibt es eine rationale Zahl $\varepsilon' \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

Zur positiven Zahl $F^{-1}(\varepsilon') \in \mathbb{Q}$ gibt es eine natürliche Zahl N mit

$$|x_n - x_m| < F^{-1}(\varepsilon') \text{ für alle } n, m > N .$$

Nun gilt

$$|X_n - X_m| = |F(x_n) - F(x_m)| = |F(x_n - x_m)| =$$
$$= F(|x_n - x_m|) < F(F^{-1}(\varepsilon')) = \varepsilon' < \varepsilon \text{ für alle } n, m > N .$$

Damit ist (X_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

(2) Sei (X_n) eine Folge aus $\mathbb{R}$. Zu $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$

mit

$$|X_n - X_m| < F(\varepsilon) \text{ für alle } n, m > N \ .$$

Analog wie zuvor erhalten wir $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$.

Damit ist (x_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$. $\square$

Satz. Sei (X_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$, und sei X_n **rational** für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $X \in \mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$.

Beweis. Wähle für jedes n $x_n \in \mathbb{Q}$ mit $F(x_n) = X_n$. Gemäß vorher ist (x_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$ und definiert daher eine reelle Zahl X .

Wir behaupten, dass $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$.

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es eine rationale Zahl $\varepsilon' \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.

Zu $\varepsilon^* = F^{-1}(\varepsilon') \in \mathbb{Q}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - x_m| < \tfrac{\varepsilon^*}{2} \quad \text{für alle } n, m > N \ .$$

Für ein beliebiges, aber festes m mit $m > N$ betrachten wir nun die Folge $(y_n^{(m)})$, wobei

$$y_n^{(m)} = \varepsilon^* - |x_n - x_m| \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Dies ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, weil mit (x_n) auch $(x_n - x_m)$ (bei festem m) eine Cauchy-Folge ist. Sie ist überdies positiv, weil

$$y_n^{(m)} = \varepsilon^* - |x_n - x_m| > \varepsilon^* - \tfrac{\varepsilon^*}{2} = \tfrac{\varepsilon^*}{2} > 0 \quad \text{für } n > N \ .$$

Damit $C_{(y_n^{(m)})} = C_{(\varepsilon^* - |x_n - x_m|)} > 0$, folglich $C_{(|x_n - x_m|)} < C_{\varepsilon^*} = \varepsilon'$.

Weiters $|X_m - X| = |C_{(x_m)} - C_{(x_n)}| = |C_{(x_m - x_n)}| = C_{(|x_m - x_n|)} < \varepsilon' < \varepsilon$.

Also gilt für alle $m > N$ dass $|X_m - X| < \varepsilon$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$. $\square$

Folgerung. Sei $X \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es eine rationale Zahl $X' \in \mathbb{R}$ mit $|X - X'| < \varepsilon$.

Beweis. Wähle $(x_n) \in X$. Wegen des vorherigen Satzes gilt $\lim_{n\to\infty} F(x_n) = X$. Es existiert daher ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|F(x_n) - X| < \varepsilon$ für alle $n > N$. Wähle etwa $X' = F(x_{N+1})$. $\square$

Satz. $\mathbb{R}$ ist vollständig.

Beweis. Sei (X_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$.

Für jedes n sei $\varepsilon_n = F(\frac{1}{n}) \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Wähle für jedes n eine rationale Zahl X'_n mit $|X'_n - X_n| < \varepsilon_n$.

(a) Wir zeigen, dass (X'_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist.

$|X'_n - X'_m| \leq |X'_n - X_n| + |X_n - X_m| + |X'_m - X_m| < \varepsilon_n + |X_n - X_m| + \varepsilon_m$

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\varepsilon_n < \tfrac{\varepsilon}{3} \ , \ \varepsilon_m < \tfrac{\varepsilon}{3} \ , \ |X_n - X_m| < \tfrac{\varepsilon}{3} \quad \text{für alle } n, m > N \ .$$

Folglich $|X'_n - X'_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$, und weiters ist $(F^{-1}(X'_n))$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$.

(b) Sei $X = C_{(F^{-1}(X'_n))}$. Wir zeigen nun, dass $X_n \to X$.

Wegen des vorherigen Satzes gilt $X'_n \to X$, und weiters

$$|X_n - X| \leq |X_n - X'_n| + |X'_n - X| < \varepsilon_n + |X'_n - X| \ .$$

Zu $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\varepsilon_n < \tfrac{\varepsilon}{2} \ , \ |X'_n - X| < \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n > N \ .$$

Daraus folgt $|X_n - X| < \varepsilon$ für alle $n > N$, i.e. $\lim_{n\to\infty} X_n = X$. $\square$

Folgerung. Eine reelle Zahlenfolge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

Sei (I_n) eine **Intervallschachtelung** in $\mathbb{R}$, i.e. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $I_n = [a_n, b_n]$ mit $I_{n+1} \subseteq I_n$ und $b_n - a_n = r_n \to 0$.

Wähle $c_n \in I_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Weil $c_m \in I_n$ für $m \geq n$, ist (c_n) eine Cauchy-Folge und konvergiert folglich. Sei $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

Man sieht leicht, dass $\{c\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

Sei nun $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, und $B \subseteq \mathbb{R}$ die Menge der oberen Schranken von A .

Es ist einfach zu sehen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $a \in A$ und ein $b \in B$ geben muss mit $b - a < \varepsilon$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wähle $a_n \in A$, $b_n \in B$ mit $b_n - a_n < \frac{1}{n}$, wobei (a_n) monoton steigt und (b_n) monoton fällt.

Gemäß vorher existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\{c\} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ wobei $I_n = [a_n, b_n]$.

Zur Übung: c ist die kleinste obere Schranke von A .

Also besitzt jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Supremum, und analog jede nichtleere nach unten beschränkte Teilmenge ein Infimum.