Definition des $\mathbb{K}$-Vektorraums

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper (meist $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$).

Informell. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist eine Menge V , auf der eine "Addition" von je zwei Elementen aus V und eine "Multiplikation" von Elementen aus $\mathbb{K}$ mit Elementen aus V mit gewissen Eigenschaften erklärt sind.

Definition. Ein **$\mathbb{K}$-Vektorraum** (bzw. Vektorraum über $\mathbb{K}$) ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$, wobei V eine Menge ist, " + " $: V \times V \to V$ $\;((v, w) \mapsto v + w)$ und " $\cdot$ " $: \mathbb{K} \times V \to V$ $\;((\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v)$ Abbildungen sind, sodass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

1) $(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe, d.h.

$\forall\, v, w \in V \;:\; v + w = w + v$ (Kommutativität)

$\forall\, v, w, u \in V \;:\; v + (w + u) = (v + w) + u$ (Assoziativität)

$\exists\, 0 \in V$ mit $v + 0 = v \;\; \forall\, v \in V$ (0 heißt **Nullvektor**)

$\forall\, v \in V \;\; \exists\, -v \in V$ mit $v + (-v) = 0$

2) $\forall\, v, w \in V$ und $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt:

$(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$

$\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$

$(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$

$1 \cdot v = v$ (1 ... Einselement in $\mathbb{K}$)

Die Elemente eines Vektorraums V heißen **Vektoren** , die Elemente von $\mathbb{K}$ **Skalare** , und $\mathbb{K}$ ist der sogenannte **Skalarenkörper**.

Bemerkungen.

- Die Operationen $\,"+"\,$ und $\,"\cdot"\,$ beschreiben also die Addition von Vektoren und die Multiplikation von Skalaren mit Vektoren.

- Die **Subtraktion** von Vektoren ist in offensichtlicher Weise defininiert, nämlich durch $v - w = v + (-w)$.

- Wir werden folgende vereinfachte Schreibweisen verwenden:
  V statt $(V, +, \cdot)$
  λv statt $\lambda \cdot v$
  $\lambda v + \mu w$ statt $(\lambda \cdot v) + (\mu \cdot w)$
  $\frac{1}{\lambda}$ statt λ^{-1} (für $\lambda \in \mathbb{K}$)

- Mittels vollständiger Induktion folgt sofort, dass Ausdrücke der Form $v_1 + v_2 + ... + v_n$ bzw. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_n v_n$ wegen der Assoziativität der Addition wohldefiniert sind.

Grundlegende Beispiele für Vektorräume.

1. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann ist

$\mathbb{K}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \ : \ x_i \in \mathbb{K} \ \ \forall \, i = 1, 2, ..., n\}$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mittels der Operationen

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

Offenbar ist der Nullvektor gleich $0 = (0, 0, ..., 0)$ und der inverse Vektor zu $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ist $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_n)$.

Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ergeben sich hier der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^n$ und der $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^n$.

Für $n = 1$ bedeutet dies, dass $\mathbb{K}$ ein Vektorraum über sich selbst ist.

2. Sei X eine beliebige Menge und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann ist

$\mathit{Abb}(X, V) = \{f : X \to V \ : \ f \ \text{ ist eine Abbildung}\}$

ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mittels der Operationen

$$(f, g) \mapsto f + g \quad \text{wobei} \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \ \ \forall \, x \in X$$

$$(\lambda, f) \mapsto \lambda f \quad \text{wobei} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x) \ \ \forall \, x \in X$$

In Vektorraum $\mathit{Abb}(X, V)$ sind die Vektoren also Abbildungen $X \to V$.

Der Nullvektor in $\mathit{Abb}(X, V)$ ist die sogenannte "Nullabbildung" $0 : X \to V$, welche jedem $x \in X$ den Nullvektor in V zuordnet.

Das inverse Element von $f : X \to V$ bzgl. der Addition ist die Abbildung $-f : X \to V$, welche durch $(-f)(x) = -f(x) \ \ \forall \, x \in X$ gegeben ist, wobei $-f(x)$ das zu $f(x)$ inverse Element in V bezeichnet.

Spezialfall. Für $V = \mathbb{R}$ bzw. $V = \mathbb{C}$ erhält man auf diese Weise die Vektorräume $\mathit{Abb}(X, \mathbb{R})$ bzw. $\mathit{Abb}(X, \mathbb{C})$, und in weiterer Spezialisierung etwa die Vektorräume $\mathit{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bzw. $\mathit{Abb}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Beispiel. Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = e^x$. Dann ist $f + g$ die Abbildung, die durch $(f + g)(x) = x^2 + e^x$ gegeben ist.

3. (Spezialisierung von 2., Polynome vom Grad $\leq n$)

Sei $\mathbb{P}_n = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ \exists \ p_0, p_1, ...p_n \in \mathbb{R} \ \text{ mit } \ p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + ... + p_n t^n \ \ \forall \ t \in \mathbb{R}\}$

Dann ist $\mathbb{P}_n \subseteq Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und wird mit den Operationen von 2. ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Für $p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + ... + p_n t^n$, $q(t) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + ... + q_n t^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt nämlich

$(p + q)(t) = (p_0 + q_0) + (p_1 + q_1)t + ... + (p_n + q_n)t^n \in \mathbb{P}_n$
$(\lambda p)(t) = \lambda p_0 + (\lambda p_1)t + ... + (\lambda p_n)t^n \in \mathbb{P}_n$.

Bemerkungen. Sei $p(t) = p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + ... + p_n t^n$. Die größte Zahl m mit $p_m \neq 0$ heißt der **Grad** des Polynoms p.
Der Nullvektor in $\mathbb{P}_n$ ist das "triviale Polynom" $p(t) = 0 \ \ \forall \ t$. Es hat per definition den Grad -1 .

4. Man beachte, dass $\mathbb{R}^n$ auch ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist, und $\mathbb{C}^n$ auch ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

Erste einfache Eigenschaften bzw. Rechenregeln

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann gilt:

1) $0 \cdot v = 0 \quad \forall \ v \in V$

2) $\lambda \cdot 0 = 0 \quad \forall \ \lambda \in \mathbb{K}$

3) $\lambda \cdot v = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0$ oder $v = 0$

4) $(-1) \cdot v = -v \quad \forall \ v \in V$.

Beweis.
zu 1) : $0 \cdot v = (0 + 0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$. Somit ist $0 \cdot v$ das neutrale

Element bzgl. der Addition, also $0 \cdot v = 0$.

zu 2) : $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$. Somit ist $\lambda \cdot 0$ das neutrale Element bzgl. der Addition, also $\lambda \cdot 0 = 0$.

zu 3) : Sei $\lambda \cdot v = 0$. Wenn $\lambda = 0$, dann ist auch $\lambda \cdot v = 0$ wegen 1) . Wenn $\lambda \neq 0$, dann $v = 1 \cdot v = (\lambda^{-1}\lambda)v = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = 0$ wegen 2) .

zu 4) : $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1 - 1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$. Das heißt, dass $(-1) \cdot v$ das (bzgl. der Addition) inverse Element zu v ist, also $(-1) \cdot v = -v$.