Untervektorräume

Sei $(V, +, \cdot)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Informell. Ein Untervektorraum von V ist eine (nichtleere) Teilmenge $W \subseteq V$, die mit den Operationen von V wieder selbst ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist.

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $W \subseteq V$.
W heißt ein **Untervektorraum** (von V), wenn

UV1) $W \neq \emptyset$

UV2) $v, w \in W \quad \Rightarrow \quad v + w \in W$

UV3) $v \in W \ , \lambda \in \mathbb{K} \quad \Rightarrow \quad \lambda v \in W$

Man überprüft leicht, dass dadurch mit den in V gegebenen Operationen "+" und "$\cdot$" die Teilmenge W selbst zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum wird.

Wir schreiben in diesem Fall $W \lhd V$.

Man beachte, dass der Nullvektor von V wegen UV3) auch in W liegt, und der Nullvektor des Vektorraums W ist.
Des weiteren ist zu $v \in W$ auch $(-1)v = -v \in W$, und $-v$ ist auch das inverse Element von v bzgl. des Vektorraums W .

Bemerkung. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\emptyset \neq W \subseteq V$. Dann gilt:
W ist Untervektorraum $\quad \Leftrightarrow \quad \forall v, w \in W \ \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \ : \ \lambda v + \mu w \in W$

Schreibweisen. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

i) Zu $v \in V$ sei $\mathbb{K}v = \{w \in V \ : \ \exists \ \lambda \in \mathbb{K} \text{ mit } w = \lambda v\}$. Das heißt, $\mathbb{K}v$ ist die Menge der "Vielfachen" von v .

ii) Zu $M, N \subseteq V$ sei $M + N = \{u = v + w \ : \ v \in M \text{ und } w \in N\}$.
In Worten, $M + N$ ist die Menge all jener Vektoren in V, welche als Summe

eines Vektors aus M und eines Vektors aus N dargestellt werden können. In analoger Weise kann dann ebenso eine Teilmenge $M_1 + M_2 + ... + M_n$ definiert werden.

Beispiele für Untervektorräume.

1) (triviale Untervektorräume)
Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und setze $W = \{0\}$. Dann gilt offenbar $V \lhd V$ und $W \lhd V$.
W heißt der **Nullvektorraum** und besteht offenbar nur aus dem Nullvektor von V .

2) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $v, w \in V$.

Dann ist $\mathbb{K}v \lhd V$ (Beweis als Übung) und $\mathbb{K}v + \mathbb{K}w \lhd V$.

Beweis: Seien $u_1, u_2 \in \mathbb{K}v + \mathbb{K}w$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gibt es $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ mit $u_1 = \lambda_1 v + \mu_1 w$ und $u_2 = \lambda_2 v + \mu_2 w$. Daraus folgt offenbar, dass $u_1 + u_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)v + (\mu_1 + \mu_2)w \in \mathbb{K}v + \mathbb{K}w$.
Weiters ist $\lambda u_1 = (\lambda\lambda_1)v + (\lambda\mu_1)w \in \mathbb{K}v + \mathbb{K}w$.

Zur geometrischen Veranschaulichung sei $V = \mathbb{R}^2$ und $v \neq 0$. Dann ist $\mathbb{R}v$ eine Gerade durch den Ursprung.
Ist $V = \mathbb{R}^3$ und sind v, w linear unabhängig (siehe später), dann ist $\mathbb{R}v + \mathbb{R}w$ eine Ebene durch den Ursprung.

3) Sei
$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ ist stetig}\}$
$\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ ist differenzierbar}\}$

Dann gilt: $\mathbb{P}_n \lhd \mathcal{D}(\mathbb{R}) \lhd \mathcal{C}(\mathbb{R}) \lhd Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(Beweis siehe Analysis VO)

Nun untersuchen wir das Verhalten von Untervektorräumen bei der Bildung von Durchschnitten und Vereinigungen.

Satz. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und für alle $i \in I$ (I ... Indexmenge) sei $W_i \lhd V$. Dann gilt $W = \bigcap\limits_{i \in I} W_i \lhd V$.
(D.h. Der Durchschnitt beliebig (!) vieler Untervektorräume ist wieder ein Untervektorraum.)

Beweis. Für jedes $i \in I$ ist $0 \in W_i$ und damit $0 \in W \neq \emptyset$.

Seien $v, w \in W$. Für jedes $i \in I$ gilt dann: $v, w \in W_i$ und damit auch $v + w \in W_i$. Somit $v + w \in W$.

Sei $v \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Für jedes $i \in I$ gilt dann: $v \in W_i$ und damit auch $\lambda v \in W_i$. Somit $\lambda v \in W$. $\square$

Wichtige Bemerkung. Sei $S \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{K}$-Vektorraums V , und sei $\mathcal{W} = \{W \lhd V \ : \ S \subseteq W\}$ (d.h. $\mathcal{W}$ ist die Familie aller Untervektorräume, welche S enthalten).

Dann ist $W^* = \bigcap\limits_{W \in \mathcal{W}} W$ mit obigem Satz ein Untervektorraum, und offenbar der kleinste Untervektorraum, welcher S enthält.

W^* heißt auch **der von S erzeugte Untervektorraum** . Im Falle von $S = \emptyset$ ist W^* offenbar der triviale Untervektorraum.

Bezüglich der Bildung von Vereinigungen beobachten wir zuerst:
die Vereinigung von (sogar nur) zwei Untervektoräumen ist im allgemeinen **kein** Untervektorraum.

Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^2$, $v = (1, 0) \in V$ und $w = (0, 1) \in V$.

Wie zuvor erwähnt, sind dann $W_1 = \mathbb{R}v \lhd V$ und $W_2 = \mathbb{R}w \lhd V$.

Es sind $v, w \in W_1 \cup W_2$, aber $v + w = (1, 1) \notin W_1 \cup W_2$.

Sind jedoch zusätzliche (!) Bedingungen erfüllt, dann ist die Vereinigung von Untervektorräumen wieder ein Untervektorraum.

Satz. 1) Sei $W_i \lhd V \ \ \forall\, i \in I$, sodaß für je zwei $i, j \in I$ gilt, dass

$W_i \subseteq W_j$ oder $W_j \subseteq W_i$.
Dann ist $W = \bigcup_{i \in I} W_i$ ein Untervektorraum von V .

2) Seien $W_1, W_2 \lhd V$ und gelte $W_1 \cup W_2 \lhd V$. Dann ist $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$.

Beweis. zu 1) : Seien $v, w \in W$. Dann gibt es $i, j \in I$ mit $v \in W_i$ und $w \in W_j$. Ist $W_i \subseteq W_j$, dann gilt $v, w \in W_j \Rightarrow v + w \in W_j \subseteq W$. Ist $W_j \subseteq W_i$, dann gilt $v, w \in W_i \Rightarrow v + w \in W_i \subseteq W$. In beiden Fällen ist $v + w \in W$.
Ist $v \in W$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gibt es ein $i \in I$ mit $v \in W_i$. Damit gilt auch $\lambda v \in W_i \subseteq W$.

zu 2) : Annahme: $W_1 \not\subseteq W_2$ und $W_2 \not\subseteq W_1$.
Dann existieren $v \in W_1$, $v \notin W_2$ und $w \in W_2$, $w \notin W_1$.

Weil $v, w \in W_1 \cup W_2$ und $W_1 \cup W_2 \lhd V$, gilt $v + w \in W_1 \cup W_2$.

Fall 1 : $v + w \in W_1$. Weil $-v \in W_1$ gilt dann $(-v) + v + w = w \in W_1$, ein Widerspruch.

Fall 2 : $v + w \in W_2$. Weil $-w \in W_2$ gilt dann $v + w + (-w) = v \in W_2$, ein Widerspruch.

Somit gilt $W_1 \subseteq W_2$ oder $W_2 \subseteq W_1$. $\square$