Basis und Dimension

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V .

1) $(v_i)_{i\in I}$ heißt ein **Erzeugendensystem** von V , wenn $\text{Span}(v_i) = V$.

2) $(v_i)_{i\in I}$ heißt **Basis** von V , wenn (v_i) Erzeugendensystem und linear unabhängig ist.

(Die Anzahl der Elemente einer Basis heißt die **Länge** dieser Basis (ist eventuell ∞)

Beispiele.

1) Sei $V = \mathbb{K}^n$. Wie zuvor gezeigt wurde, ist die Familie $(e_1, e_2, ..., e_n)$ mit $e_i = (0, .., 0, \underset{i-teStelle}{1}, 0, ..0)$ linear unabhängig.

Sei nun $v = (a_1, a_2, ..., a_n) \in V$.
Dann gilt offenbar $v = a_1e_1 + a_2e_2 + ... + a_ne_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_ie_i$.

Damit ist $(e_1, e_2, ..., e_n)$ auch ein Erzeugendensystem, mithin eine Basis, und heißt die **kanonische Basis** im $\mathbb{K}^n$.

2) Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (3, -1)$, $v_2 = (4, 1)$, $v_3 = (-1, 2)$ im $\mathbb{R}^2$.

(v_1) ist linear unabhängig, aber $\text{Span}(v_1) \neq \mathbb{R}^2$

(v_1, v_2, v_3) sind linear abhängig (weil $9v_1 - 5v_2 + 7v_3 = 0$) , und spannen den $\mathbb{R}^2$ auf, - sind also ein Erzeugendensystem, aber keine Basis.

Man überlege sich : (v_1, v_2) sind eine Basis des $\mathbb{R}^2$.

3) $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum hat die (kanonische) Basis (1) .
$\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum hat die Basis $(1, i)$.

4) $(p_0, p_1, ..., p_n)$ mit $p_i(t) = t^i$ ist Basis von $\mathbb{P}_n$.

5) Per definition ist die leere Familie Basis des Nullvektorraums $\{0\}$.

Satz. Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren im $\mathbb{K}$-Vektorraum $V \neq \{0\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

1) $(v_i)_{i\in I}$ ist Basis von V ,

2) $(v_i)_{i\in I}$ ist ein unverkürzbares Erzeugendensystem, d.h. $\forall J \subseteq I$, $J \neq I$ gilt $\text{Span}(v_i)_{i\in J} \neq V$.

3) $(v_i)_{i\in I}$ ist eine unverlängerbare linear unabhängige Familie, d.h. $(v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig und jede Familie $(v_i)_{i\in J}$ mit $I \subseteq J$, $I \neq J$ ist linear abhängig.

4) $(v_i)_{i\in I}$ ist ein Erzeugendensystem und jeder Vektor $v \neq 0$ besitzt eine eindeutige Darstellung als Linearkombination der $(v_i)_{i\in I}$.

Beweis. 4) $\Rightarrow$ 1) : siehe Satz vorher.

1) $\Rightarrow$ 2) : Annahme : $(v_i)_{i\in I}$ ist verkürzbares Erzeugendensystem, d.h. $\exists\ J \subseteq I$, $J \neq I$ und $\text{Span}(v_i)_{i\in J} = V$.

Wähle $i_0 \in I \setminus J$. Weil $v_{i_0} \in V$ gibt es $i_1, i_2, ..., i_r \in J$ und $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ mit $v_{i_0} = \lambda_1 v_{i_1} + \lambda_2 v_{i_2} + ... + \lambda_r v_{i_r}$ bzw. $(-1)v_{i_0} + \lambda_1 v_{i_1} + \lambda_2 v_{i_2} + ... + \lambda_r v_{i_r} = 0$.

Damit ist aber $(v_{i_0}, v_{i_1}, ..., v_{i_r})$ linear abhängig, ein Widerspruch. Also ist $(v_i)_{i\in I}$ ein unverkürzbares Erzeugendensystem.

2) $\Rightarrow$ 3) : Wir zeigen zuerst, dass $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist. Weil $V \neq \{0\}$, gilt $I \neq \emptyset$. Wenn $I = \{i_1\}$ und $v = v_{i_1}$, dann ist $v \neq 0$ und $V = \mathbb{K}v$ und (v) ist linear unabhängig.

Sei also $|I| \geq 2$. Wäre $(v_i)_{i\in I}$ linear abhängig, dann $\exists\ k \in I$ mit $v_k \in \text{Span}(v_i)_{i\in I\setminus\{k\}}$ und damit $\text{Span}(v_i)_{i\in I\setminus\{k\}} = V$, ein Widerspruch. Damit ist $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig.

Nun zeigen wir, dass $(v_i)_{i\in I}$ nicht linear unabhängig verlängert werden kann.

Annahme : $\exists\ J \supseteq I$, $J \neq I$ und $(v_i)_{i\in J}$ ist linear unabhängig.

Wähle $i_0 \in J\backslash I$. Weil $(v_i)_{i\in I}$ laut Voraussetzung ein Erzeugendensystem ist, gibt es $i_1, i_2, ..., i_r \in I$ und $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r \in \mathbb{K}$ mit $v_{i_0} = \lambda_1 v_{i_1} + \lambda_2 v_{i_2} + ... + \lambda_r v_{i_r}$. Dies bedeutet aber, dass $(v_i)_{i\in J}$ linear abhängig ist, ein Widerspruch.

3) $\Rightarrow$ 4) : Aus der linearen Unabhängigkeit folgt die Eindeutigkeit der Darstellung (siehe vorher).

Wir zeigen nun, dass $(v_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem ist. Sei $v \in V$. Wähle ein Element $i_0 \notin I$ und setze $J = I \cup \{i_0\}$ und $v_{i_0} = v$.

Laut Voraussetzung muß dann $(v_i)_{i\in J}$ linear abhängig sein, also muß es $v_{i_1}, ..., v_{i_r}$ mit $i_1, ..., i_r \in I$ geben, sodass $v_{i_0}, v_{i_1}, ..., v_{i_r}$ linear abhängig sind. Dies bedeutet, dass eine nichttriviale Darstellung $\lambda v_{i_0} + \lambda_1 v_{i_1} + ... + \lambda_r v_{i_r} = 0$ existiert.

Da $(v_{i_1}, ..., v_{i_r})$ linear unabhängig sind, muß $\lambda \neq 0$ sein, und damit $v_{i_0} = -\frac{\lambda_1}{\lambda} v_{i_1} + ... - \frac{\lambda_r}{\lambda} v_{i_r}$. Also $v = v_{i_0} \in \mathrm{Span}(v_i)_{i\in I}$. $\square$

Folgerung. (**Basisauswahlsatz**)
Sei der $\mathbb{K}$-Vektorraum V endlich erzeugt, d.h. V besitzt ein endliches Erzeugendensystem $(v_1, v_2, ..., v_r)$. Durch sukzessives Wegnehmen von Vektoren erreicht man in endlich vielen Schritten ein unverkürzbares Erzeugendensystem.

Dies heißt, dass aus einem endlichen Erzeugendensystem eine Basis ausgewählt werden kann.

Für den später folgenden Austauschsatz von Steinitz ist folgender Hilfssatz wichtig.

Lemma. (**Austauschlemma**)
Sei $(v_1, v_2, ..., v_r)$ eine Basis von V und sei $w = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_r v_r$.

Gilt $\lambda_k \neq 0$, so ist $(v_1, ..., v_{k-1}, w, v_{k+1}, ..., v_r)$ wieder eine Basis.

(Hier kann also v_k durch w ausgetauscht werden)

Beweis. oBdA kann $k = 1$ (bzw. $\lambda_1 \neq 0$) betrachtet werden (ansonsten Umnumerierung der Basisvektoren). Zu zeigen ist also, dass $(w, v_2, ..., v_r)$ eine Basis ist.

Sei $v \in V$. Dann gibt es $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r \in \mathbb{K}$ sodass $v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + ... + \mu_r v_r$. Wegen $v_1 = \frac{1}{\lambda_1} w - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2 - ... - \frac{\lambda_r}{\lambda_1}$ ist

$v = \frac{\mu_1}{\lambda_1} w + (\mu_2 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}) v_2 + ... + (\mu_r - \frac{\lambda_r}{\lambda_1}) v_r$.

Also ist $(w, v_2, ..., v_r)$ ein Erzeugendensystem.

Nun gelte $\alpha w + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_r v_r = 0$. Dann ist $\alpha \lambda_1 v_1 + (\alpha \lambda_2 + \alpha_2) v_2 + ... + (\alpha \lambda_r + \alpha_r) v_r = 0$. Weil $(v_1, v_2, ..., v_r)$ linear unabhängig ist, gilt

$\alpha \lambda_1 = 0$, $\alpha \lambda_2 + \alpha_2 = 0$, ..., $\alpha \lambda_r + \alpha_r = 0$.

Weil $\lambda_1 \neq 0$, ist $\alpha = 0$ und damit $\alpha_2 = ... = \alpha_r = 0$.

Dies wiederum bedeutet, dass $(w, v_2, ..., v_r)$ linear unabhängig ist, also insgesamt eine Basis. $\square$

Satz. (**Austauschsatz von Steinitz**)
Sei $(v_1, v_2, ..., v_r)$ eine Basis des $\mathbb{K}$-Vektorraums V , und sei $(w_1, w_2, ..., w_n)$ eine linear unabhängige Familie.

Dann ist $n \leq r$, und $\exists\ i_1, i_2, ..., i_n$ sodass v_{i_1} gegen w_1 , v_{i_2} gegen w_2 , ... , v_{i_n} gegen w_n ausgetauscht werden können und man wieder eine Basis erhält.

(D.h. $w_1, w_2, ..., w_n$ und geeignete Vektoren aus $(v_1, v_2, ..., v_r)$ bilden eine Basis)

Beweis. w_1 ist Linearkombination der Vektoren $(v_1, v_2, ..., v_r)$, etwa $w_1 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_r v_r$. Weil $w_1 \neq 0$, gibt es ein k mit $\lambda_k \neq 0$.

Mittels des Austauschlemmas kann w_1 gegen v_k ausgetauscht werden. Nach geeigneter Umbenennung der Basisvektoren ist dann $(w_1, v_2, ..., v_r)$ eine Basis.

Nun ist w_2 Linearkombination der Vektoren $(w_1, v_2, ..., v_r)$, etwa $w_2 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 v_2 + ... + \lambda_r v_r$. Dann $\exists\ k \geq 2$ mit $\lambda_k \neq 0$. ($k \geq 2$ weil sonst w_1, w_2 linear abhängig wären)

Wiederum kann w_2 gegen ein v_k , $k \geq 2$, ausgetauscht werden. Nach geeigneter Umbenennung der Basisvektoren ist dann $(w_1, w_2, ..., v_r)$ eine Basis.

Dieses Verfahren wird nun fortgesetzt und endet nach endlich vielen Schritten.

Dabei muß nun $n \leq r$ sein (weil im Falle von $n > r$ die Familie $(w_1, ..., w_r)$ Basis ist und damit maximal linear unabhängig, Widerspruch). $\square$

Folgerung. Besitzt V eine endliche Basis, dann ist jede Basis endlich und je 2 Basen haben die gleiche Länge.

Beweis. Sei $(v_1, v_2, ..., v_r)$ eine Basis von V. Wegen des Austauschsatzes kann es nicht mehr als r linear unabhängige Vektoren geben.

Ist $(w_1, w_2, ..., w_k)$ eine weitere Basis, dann liefert die 2-malige Anwendung des Austauschsatzes $k \leq r$ und $r \leq k$, also $k = r$. $\square$

Damit können wir nun sinnvoll die Dimension eines $\mathbb{K}$-Vektorraums erklären.

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \begin{cases} \infty & V \text{ hat keine endliche Basis} \\ r & V \text{ hat eine Basis mit } r \text{ Vektoren} \end{cases}$$

heißt **Dimension von** V über $\mathbb{K}$.

Bemerkungen.

1) Mittels des Lemma von Zorn kann man zeigen: jede linear unabhängige Familie in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum kann zu einer Basis vergrößert werden. Dies zeigt auch, dass jeder $\mathbb{K}$-Vektorraum eine Basis besitzt.

2) Sei V endlich erzeugt. Wie früher gezeigt, ist V dann endlichdimensional. Wähle eine Basis von V, etwa $(v_1, v_2, ..., v_r)$. Zu einer gegebenen linear unabhängigen Familie $(w_1, w_2, ..., w_n)$ gilt dann $n \leq r$ und nach geeigneter Umbenennung ist dann $(w_1, ..., w_n, v_{n+1}, ..., v_r)$ eine Basis.

Dies bedeutet, dass $(w_1, w_2, ..., w_n)$ zu einer Basis vergrößert werden kann (**Basisergänzungssatz** .

3) Sei $\dim V = n < \infty$ und $(v_1, v_2, ..., v_n)$ linear unabhängig. Dann ist $(v_1, v_2, ..., v_n)$ eine Basis.

4) Sei $W \lhd V$ und $\dim V < \infty$. Dann ist $\dim W \leq \dim V$, und wenn $\dim W = \dim V$, dann ist $V = W$.

Beispiele.

1) $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$ (weil $(e_1, ...e_n)$ Basis ist)

2) $\dim \mathbb{P}_n = n + 1$

3) $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ (Aufgabe!)

4) $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

5) $\dim Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$ (Aufgabe!)