Matrizen - I

Definition. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Ein rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & .. & a_{2n} \\ .. & & & & .. \\ .. & & & & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$$

wobei $a_{ij} \in \mathbb{K}$ heißt **Matrix** bzw. eine $m \times n$ Matrix (mit Elementen aus $\mathbb{K}$).

Die Elemente a_{ij} einer Matrix heißen auch **Komponenten** der Matrix.

Für jedes $i \in \{1, 2, ..., m\}$ heißt

$$a_i = (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in})$$

die ***i*-te Zeile** von A bzw. der ***i*-te Zeilenvektor** von A.

Für jedes $j \in \{1, 2, ..., n\}$ heißt

$$a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ .. \\ .. \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

die ***j*-te Spalte** von A bzw. der ***j*-te Spaltenvektor** von A.

Somit:

- Eine $m \times n$ Matrix A hat also m Zeilen und n Spalten.
- Jede Zeile a_i einer $m \times n$ Matrix A kann als Element von $\mathbb{K}^n$ aufgefaßt werden.
- Jede Spalte a^j einer $m \times n$ Matrix A kann als Element von $\mathbb{K}^m$ aufgefaßt werden.

- Das Element a_{ij} einer Matrix A ist jenes Element, welches in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von A steht.

Definition. Eine $m \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ heißt **quadratisch**, wenn $m = n$.

Die Elemente $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ bilden dann die sog. **Diagonalelemente** (bzw. **Hauptdiagonale**) von A.

Gilt darüberhinaus $a_{ij} = 0$ für $i > j$ (bzw. $i < j$) , dann heißt die (quadratische) Matrix A eine **obere** (bzw. **untere**) **Dreiecksmatrix**.

A heißt **Diagonalmatrix**, wenn A quadratisch ist und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

Beispiele. (siehe Tafel)

Bemerkung. Sei $M(m \times n; \mathbb{K})$ die Menge der $m \times n$ Matrizen mit Elementen aus $\mathbb{K}$.

Folgende Operationen machen $M(m \times n; \mathbb{K})$ zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum:

Für $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ setze

$$A + B = (c_{ij}) \quad \text{mit} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall \ 1 \leq i \leq m \ , 1 \leq j \leq n$$

$$\lambda A = (d_{ij}) \quad \text{mit} \quad d_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall \ 1 \leq i \leq m \ , 1 \leq j \leq n$$

Z.B.: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $m = 3$, $n = 2$, $\lambda = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ A + B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 9 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \ \text{und}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -8 \\ -10 & -12 \end{pmatrix}$$

Der Nullvektor im Vektorraum $M(m \times n; \mathbb{K})$ ist die **Nullmatrix** O (d.h.

alle Matrixelemente sind 0) . Die inverse Matrix von $A = (a_{ij})$ bzgl. der Addition ist die Matrix $-A = (-a_{ij})$.

Für jedes $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ sei E_{ij} jene Matrix, wo die ij-te Komponente 1 ist und alle verbleibenden Komponenten Null sind. Man sieht leicht, dass die Familie (E_{ij}) linear unabhängig ist. Für eine beliebige Matrix $A = (a_{ij})$ gilt offenbar dann $A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$, also ist die Familie E_{ij} auch ein Erzeugendensystem und damit eine Basis von $M(m \times n; \mathbb{K})$.

Somit ist $\dim M(m \times n; \mathbb{K}) = m \cdot n$.

. . . .

Elementare Zeilenumformungen

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ Matrix. Wir betrachten nun gewisse Umformungen einer Matrix, bei der eine vorliegende Matrix in eine andere Matrix übergeführt wird. Dabei gibt es 4 Grundtypen:

I. Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} & & * & & \\ & & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ & & * & & \\ & & * & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & & * & & \\ & & * & & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \dots & \lambda a_{in} \\ & & * & & \\ & & * & & \end{pmatrix}$$

II. Addition der j-ten Zeile zur i-ten Zeile :

$$\begin{pmatrix} & & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ & & * & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ & & * & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & & * & & \\ a_{i1} + a_{j1} & a_{i2} + a_{j2} & \dots & \dots & a_{in} + a_{jn} \\ & & * & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ & & * & & \end{pmatrix}$$

III. Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile, $\lambda \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} & & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & ... & a_{in} \\ & & * & & \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & ... & a_{jn} \\ & & * & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & & * & & \\ a_{i1}+\lambda a_{j1} & a_{i2}+\lambda a_{j2} & ... & ... & a_{in}+\lambda a_{jn} \\ & & * & & \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & ... & a_{jn} \\ & & * & & \end{pmatrix}$$

IV. Vertauschen der i-ten Zeile mit der j-ten Zeile :

$$\begin{pmatrix} & & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & ... & a_{in} \\ & & * & & \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & ... & a_{jn} \\ & & * & & \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} & & * & & \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & ... & a_{jn} \\ & & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & ... & a_{in} \\ & & * & & \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Die Umformungen III. und IV. ergeben sich durch wiederholte Anwendungen der Umformungen I. und II. .

$$III.: \begin{pmatrix} * \\ a_i \\ * \\ a_j \\ * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} * \\ a_i \\ * \\ \lambda a_j \\ * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} * \\ a_i+\lambda a_j \\ * \\ \lambda a_j \\ * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} * \\ a_i+\lambda a_j \\ * \\ a_j \\ * \end{pmatrix}$$

$$IV.: \begin{pmatrix} * \\ a_i \\ * \\ a_j \\ * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} * \\ a_i \\ * \\ -a_j \\ * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} * \\ a_i \\ * \\ a_i-a_j \\ * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} * \\ a_i-(a_i-a_j) \\ * \\ a_i-a_j \\ * \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} * \\ a_j \\ * \\ a_i - a_j \\ * \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} * \\ a_j \\ * \\ a_i \\ * \end{pmatrix}$$

Bemerkung. In analoger Weise lassen sich damit auch natürlich sog. **elementare Spaltenumformungen** definieren.

Sei A eine $m \times n$ Matrix.

- Durch die m Zeilen $a_1, a_2, ..., a_m$ sind also m Vektoren des $\mathbb{K}^n$ gegeben.

- Durch die n Spalten $a^1, a^2, ..., a^n$ sind also n Vektoren des $\mathbb{K}^m$ gegeben.

Definition. Sei A eine $m \times n$ Matrix.

1) Der **Zeilenraum** von A ist $ZR(A) = \text{Span}(a_1, a_2, ..., a_m) \lhd \mathbb{K}^n$.

2) Der **Spaltenraum** von A ist $SR(A) = \text{Span}(a^1, a^2, ..., a^n) \lhd \mathbb{K}^m$.

3) (**Zeilenrang** , **Spaltenrang**)

   $\text{Zeilenrang}(A) = \dim_{\mathbb{K}} \text{ZR}(A)$ (ist stets $\leq \min\{m, n\}$)

   $\text{Spaltenrang}(A) = \dim_{\mathbb{K}} \text{SR}(A)$ (ist stets $\leq \min\{m, n\}$)

Lemma. Die Matrix B entstehe aus A durch eine elementare Zeilenumformung vom Typ I oder Typ II.

Dann ist $ZR(A) = ZR(B)$.

Beweis.

(a) (Umformung vom Typ I)

A habe die Zeilenvektoren $a_1, ..., a_i, ..., a_m$

B habe die Zeilenvektoren $a_1, ..., \lambda a_i, ..., a_m$ $(\lambda \neq 0)$

Ist nun $v \in ZR(A)$, dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_m \in \mathbb{K}$ mit

$v = \mu_1 a_1 + ... + \mu_i a_i + ... + \mu_m a_m = \mu_1 a_1 + ... + \frac{\mu_i}{\lambda}(\lambda a_i) + ... + \mu_m a_m$.

Also ist auch $v \in ZR(B)$ und damit gilt $ZR(A) \subseteq ZR(B)$.

Ist $v \in ZR(B)$, dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_m \in \mathbb{K}$ mit

$v = \mu_1 a_1 + ... + \mu_i(\lambda a_i) + ... + \mu_m a_m = \mu_1 a_1 + ... + (\mu_i \lambda) a_i + ... + \mu_m a_m$.

Also ist auch $v \in ZR(A)$ und damit gilt $ZR(B) \subseteq ZR(A)$, insgesamt also $ZR(A) = ZR(B)$.

(b) (Umformung vom Typ II)

A habe die Zeilenvektoren $a_1, .., a_i, .., a_j, .., a_m$

B habe die Zeilenvektoren $a_1, .., a_i + a_j, .., a_j, .., a_m$

Ist nun $v \in ZR(A)$, dann gibt es $\mu_1, ..., \mu_m \in \mathbb{K}$ mit

$v = \mu_1 a_1 + .. + \mu_i a_i + .. + \mu_j a_j + .. + \mu_m a_m = \mu_1 a_1 + .. + \mu_i(a_i + a_j) + .. + (\mu_j - \mu_i) a_j + .. + \mu_m a_m$.

Also ist auch $v \in ZR(B)$ und damit gilt $ZR(A) \subseteq ZR(B)$. Analog kann gezeigt werden, dass $ZR(B) \subseteq ZR(A)$ gilt, und damit ist $ZR(A) = ZR(B)$. $\square$

Folgerung. Die Matrix B entstehe aus A durch endlich viele elementare Zeilenumformungen.

Dann gilt: $ZR(A) = ZR(B)$.

Man sagt, eine Matrix $B \in M(m \times n; \mathbb{K})$, $B \neq O$ liegt in **Zeilenstufenform** vor, wenn es Spaltenindizes $j_1 < j_2 < ... < j_k$ gibt, sodass $b_{1j_1} \neq 0$, $b_{2j_2} \neq 0$, ... , $b_{kj_k} \neq 0$ und

für $j < j_1$: $b_{ij} = 0 \ \forall \ i$

für $j_m \leq j < j_{m+1}$: $b_{ij} = 0 \;\; \forall \; i > m$

für $j \geq j_k$: $b_{ij} = 0 \;\; \forall \; i > k$

Das heißt: durch die Elemente $b_{1j_1}, b_{2j_2}, ..., b_{kj_k}$ wird eine "Stufenlinie" gebildet, sodass alle Elemente unterhalb der Stufenlinie $= 0$ sind.

(Veranschaulichung siehe Tafel.)

Behauptung. Sind dann $b_1, b_2, ..., b_k$ die ersten k Zeilenvektoren von B, dann bilden $(b_1, b_2, ..., b_k)$ eine Basis von $ZR(B)$, und im besonderen gilt damit $\text{Zeilenrang}(B) = k$.

Beweis. Weil $b_i = 0$ für $i > k$, ist zu zeigen, dass $(b_1, b_2, ..., b_k)$ linear unabhängig ist.

Sei also $\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_k b_k = 0$.

Weil $b_1 = (0, .., b_{1j_1}, .., b_{1n})$, $b_2 = (0, ..., b_{2j_2}, .., b_{2n})$ etc., ist die j_1-te Komponente von $\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_k b_k$ gleich $\lambda_1 b_{1j_1}$. Somit $\lambda_1 b_{1j_1} = 0$ und weil $b_{1j_1} \neq 0$, ist $\lambda_1 = 0$.

Damit ist $\lambda_2 b_2 + ... + \lambda_k b_k = 0$. Die Prüfung der j_2-ten Komponente ergibt $\lambda_2 b_{2j_2} = 0$ und weiters $\lambda_2 = 0$.

Fortführung dieses Verfahrens ergibt $\lambda_2 = \lambda_3 = ... = \lambda_k = 0$. $\square$

Lemma. Sei A eine $m \times n$ Matrix. Dann kann A durch endlich viele elementare Zeilenumformungen vom Typ III und Typ IV in eine Matrix B in Zeilenstufenform übergeführt werden.

Beweis bzw. Illustration. (siehe Tafel)

Damit kann nun folgende Problemstellung gelöst werden:

Seien $v_1, v_2, ..., v_m \in \mathbb{K}^n$. Bestimme eine Basis von $\text{Span}(v_1, ..., v_m)$.

Lösung. Bilde eine $m \times n$ Matrix A , welche als Zeilenvektoren $v_1, v_2, ..., v_m$ hat. Führe A in Zeilenstufenform über, die resultierende Matrix sei mit B

bezeichnet. Dann bilden die **Nicht-Nullzeilen** von B die gesuchte Basis.

Beispiel. (siehe Tafel)

Als eine weitere Konsequenz des Vorhergehenden sei folgendes Ergebnis erwähnt (Beweis als Übung). Damit kann dann etwa entschieden werden, ob eine gegebene Familie von Vektoren eine Basis bildet oder nicht.

Korollar. Seien $v_1, v_2, ..., v_n \in \mathbb{K}^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $(v_1, v_2, ..., v_n)$ ist eine Basis von $\mathbb{K}^n$

2) Die Matrix A mit den Zeilenvektoren $v_1, v_2, ..., v_n$ kann durch elementare Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix übergeführt werden, wobei alle Diagonalelemente $\neq 0$ sind.

Beispiel. (siehe Tafel)

Bemerkung. In analoger Weise können natürlich auch **elementare Spaltenumformungen** und die Spaltenstufenform definiert werden. Wir werden später zeigen, dass Zeilenrang=Spaltenrang .