Summen und direkte Summen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Wie früher erwähnt, ist für **beliebige** Teilmengen $M, N \subseteq V$ die Teilmenge $M+N \subseteq V$ wie folgt definiert $M+N = \{v+w : v \in M \ , w \in N\}$. Man sieht leicht, dass i.a. $M+N$ **kein** Teilraum von V ist.

Hingegen gilt

Satz. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $W, W' \lhd V$.

Dann ist $W + W' = \mathrm{Span}(W \cup W')$. Im besonderen ist also $W + W'$ ein Teilraum von V und heißt die **Summe** von W und W' .

Beweis. Ist $v \in W + W'$, dann existieren $w \in W$ und $w' \in W'$ mit $v = w + w'$. Klarerweise ist dann $v \in \mathrm{Span}(W \cup W')$, also $W + W' \subseteq \mathrm{Span}(W \cup W')$.

Ist $v \in \mathrm{Span}(W \cup W')$, dann ist v eine Linearkombination von Vektoren aus $W \cup W'$. Diese Linearkombination kann dargestellt werden in der Form $v = w + w'$, wobei w eine Linearkombination von Vektoren aus W und w' eine Linearkombination von Vektoren aus W' ist. Weil $W \lhd V$ (bzw. $W' \lhd V$), gilt $w \in W$ und $w' \in W'$. Also $v = w + w' \in W + W'$, und damit $\mathrm{Span}(W \cup W') \subseteq W + W'$.

Insgesamt gilt also $W + W' = \mathrm{Span}(W \cup W')$. $\square$

Wir fragen als nächstes nach der Dimension von $W + W'$. Hier gilt

Satz. (**Dimensionsformel**)
Sei $\dim V < \infty$ und $W, W' \lhd V$. Dann gilt

$\dim(W + W') = \dim W + \dim W' - \dim(W \cap W')$.

Beweis. Sei $(v_1, ..., v_n)$ eine Basis von $W \cap W'$. Weil $W \cap W' \lhd W$ und $W \cap W' \lhd W'$, existieren nach dem Basisergänzungssatz Vektoren $w_1, ..., w_k \in W$ und $w'_1, ..., w'_l \in W'$ sodass $(v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_k)$ eine Basis von W und $(v_1, ..., v_n, w'_1, ..., w'_l)$ eine Basis von W' ist.

Wir behaupten nun, dass $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_k, w'_1, ..., w'_l)$ eine Basis von $W + W'$ ist.

i) Sei $v \in W + W'$. Es gibt also $w \in W$ und $w' \in W'$ mit $v = w + w'$. Weil w eine Linearkombination von $(v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_k)$ und w' eine Linearkombination von $(v_1, ..., v_n, w'_1, ..., w'_l)$ ist, ist v eine Linearkombination von $(v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_k, w'_1, ..., w'_l)$. Somit ist $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von $W + W'$.

ii) Nun sei $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n + \mu_1 w_1 + ... + \mu_k w_k + \mu'_1 w'_1 + ... + \mu'_l w'_l = 0$.

Setze $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n + \mu_1 w_1 + ... + \mu_k w_k$. Dann gilt $v \in W$ und wegen $v = -(\mu'_1 w'_1 + ... + \mu'_l w'_l)$ auch $v \in W'$, also $v \in W \cap W'$.

Damit existieren aber $\lambda'_1, ..., \lambda'_n \in \mathbb{K}$ mit $v = \lambda'_1 v_1 + ... + \lambda'_n v_n$.

Nun gilt $0 = v - v = (\lambda_1 - \lambda'_1) v_1 + ... + (\lambda_n - \lambda'_n) v_n + \mu_1 w_1 + ... + \mu_k w_k$.

Weil $(v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_k)$ linear unabhängig ist, gilt
$\lambda_1 = \lambda'_1$, ..., $\lambda_n = \lambda'_n$, $\mu_1 = 0$, ..., $\mu_k = 0$.

Damit ist $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n + \mu'_1 w'_1 + ... + \mu'_l w'_l = 0$. Weil $(v_1, ..., v_n, w'_1, ..., w'_l)$ linear unabhängig ist, gilt
$\lambda_1 = 0$, ..., $\lambda_n = 0$, $\mu'_1 = 0$, ..., $\mu'_l = 0$, womit
$(v_1, ..., v_n, w_1, ..., w_k, w'_1, ..., w'_l)$ linear unabhängig ist. Damit ist die Behauptung gezeigt.

iii) Damit gilt also $\dim(W + W') = n + k + l$, $\dim W = n + k$, $\dim W' = n + l$, $\dim(W \cap W') = n$.

Also $\dim(W + W') = \dim W + \dim W' - \dim(W \cap W')$. $\square$

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $W, W' \lhd V$. Gibt es ein $0 \neq v \in W \cap W'$, dann gilt trivialerweise $v = v + 0 = 0 + v$. Dies bedeutet aber, dass die Darstellung von v als Summe eines Vektors aus W und eines Vektors aus W' **nicht eindeutig** ist.

Die Frage nach der Eindeutigkeit der Darstellung führt zum Begriff der direkten Summe.

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $W, W' \lhd V$.

$W+W'$ ist die **direkte Summe** von W und W', in Zeichen $W \oplus W'$, wenn zusätzlich $W \cap W' = \{0\}$ ist.

Lemma. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) Die Summe von W und W' ist direkt,

2) $\forall\, v \in W+W' \quad \overset{1}{\exists}\ w \in W \quad \overset{1}{\exists}\ w' \in W'$ mit $v = w + w'$.

Beweis.
$1) \Rightarrow 2)$: Sei $v \in W+W'$ mit $v = w_1 + w_1'$ und $v = w_2 + w_2'$, wobei $w_1, w_2 \in W$ und $w_1', w_2' \in W'$.

Dann ist $w_1 + w_1' = w_2 + w_2'$ bzw. $w_1 - w_2 = w_2' - w_1'$.

Damit ist $w_1 - w_2 \in W \cap W'$, und laut Voraussetzung ist $w_1 - w_2 = 0$, also $w_1 = w_2$. Damit ist aber auch $w_1' = w_2'$, d.h. die Darstellung von v ist eindeutig.

$2) \Rightarrow 1)$: Würde ein $0 \neq v \in W \cap W'$ existieren, so hätte man durch $v = v + 0 = 0 + v$ einen Widerspruch zur Eindeutigkeit der Darstellung. Also muß $W \cap W' = \{0\}$ sein. $\square$

Die folgende Aussage ist eine unmittelbare Konsequenz der Dimensionsformel.

Lemma. Sei $\dim V < \infty$ und $W, W' \lhd V$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $V = W \oplus W'$,

2) $V = W + W'$ und $\dim V = \dim W + \dim W'$,

3) $W \cap W' = \{0\}$ und $\dim V = \dim W + \dim W'$.

Bemerkungen und Folgerungen. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

1) Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V . Sei $I = J \cup J'$, wobei $J \cap J' = \emptyset$. Setze $W = \mathrm{Span}(v_i)_{i \in J}$ und $W' = \mathrm{Span}(v_i)_{i \in J'}$.

Dann ist $V = W \oplus W'$.

2) Sei $V = W \oplus W'$, $(v_i)_{i \in J}$ eine Basis von W und $(v_i)_{i \in J'}$ eine Basis von W' .

Dann ist $(v_i)_{i \in J \cup J'}$ eine Basis von V .

3) $W \lhd V \quad \Rightarrow \quad \exists\, W' \lhd V$ mit $V = W \oplus W'$.

Beweis. 1) , 2) Aufgabe.

zu 3) : Sei $(v_i)_{i \in J}$ eine Basis von W . Mit dem Basisergänzungssatz gibt es eine Menge I mit $J \subseteq I$ und $(v_i)_{i \in I}$ ist eine Basis von V .

Nun setze $W' = \mathrm{Span}(v_i)_{i \in I \setminus J}$. Dann ist $V = W \oplus W'$. $\square$

Die Bildung der (direkten) Summe von **beliebig vielen** Unterräumen verläuft in direkter Analogie zu vorher und sei kurz skizziert.

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $W_i \lhd V$ für alle $i \in I$.

Die **Summe der** W_i ist per definition $\sum\limits_{i \in I} W_i = \mathrm{Span}(\bigcup\limits_{i \in I} W_i)$.

Falls $I = \{1, 2, ..., n\}$, so schreibt man auch $W_1 + W_2 + ... + W_n$.

Analog wie vorher ist $v \in \sum\limits_{i \in I} W_i$ genau dann, wenn v eine endliche Summe von Vektoren aus $\bigcup\limits_{i \in I} W_i$ ist.

Die Summe $v \in \sum\limits_{i \in I} W_i$ heißt nun **direkt**, in Zeichen $\bigoplus\limits_{i \in I} W_i$, wenn zusätzlich

$$\forall\, i \in I \ : \quad W_i \cap (\sum_{j \neq i} W_j) = \{0\} \ .$$

Dies ist wiederum gleichbedeutend mit der **Eindeutigkeit** der Darstellung der Vektoren $v \in \sum\limits_{i \in I} W_i$.

Ist $I = \{1, 2, ..., n\}$, so schreibt man auch $W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_n$ für die direkte Summe.

Neben der Summenbildung gibt es noch weitere grundlegende Konstruktionsmöglichkeiten.

1) Seien $V_1, V_2, ..., V_n$ $\mathbb{K}$-Vektorräume (überall das gleiche $\mathbb{K}$) .

Dann wird $V = V_1 \times V_2 \times ... \times V_n$ durch folgende Operationen zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum :

für $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$, $w = (w_1, w_2, ..., w_n) \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ definiere

$$v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, ..., v_n + w_n)$$

$$\lambda v = (\lambda v_1, \lambda v_2, ..., \lambda v_n)$$

Der Nullvektor ist dann $(0, 0, ..., 0)$ und der inverse Vektor zu $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ ist $-v = (-v_1, -v_2, ..., -v_n)$.

V heißt das **Produkt** der Vektorräume $V_1, V_2, ..., V_n$.

Mit $V_1 = V_2 = ... = V_n = \mathbb{K}$ entsteht etwa auf diese Weise der Vektorraum $\mathbb{K}^n$.

2) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $W \lhd V$.

Dann ist damit in natürlicher Weise eine Äquivalenzrelation auf V gegeben, nämlich

$$v \sim w \quad \Leftrightarrow \quad v - w \in W \qquad \text{für } v, w \in V$$

Man sieht leicht, dass dies tatsÿchlich eine Äquivalenzrelation ist. Für jedes $v \in V$ sei $[v]$ jene Äquivalenzklasse, der v angehört.

Im besonderen gilt dann, dass $w \in [v] \;\Leftrightarrow\; w \sim v \;\Leftrightarrow\; w \in v + W$, d.h. die Äquivalenzklassen sind die Translate von W . Die Menge aller (verschiedenen) Äquivalenzklassen sei mit V/W bezeichnet.

Seien nun $v \sim v'$, $w \sim w'$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Man rechnet leicht nach, dass dann $v + w \sim v' + w'$ und $\lambda v \sim \lambda v'$ gilt.

Genau wegen dieser Verträglichkeit der Äquivalenzrelation mit den Operationen auf V kann man nun Operationen auf V/W definieren, nämlich

$$[v] + [w] := [v + w] \quad , \quad \lambda[v] := [\lambda v] \; .$$

Diese Operationen sind ihrer Verträglichkeit wohldefiniert (!) , d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten.

Auf diese Weise wird die Menge V/W zu einem Vektorraum, welcher der **Quotientenraum** "V nach W" genannt wird.

Man kann zeigen, dass viele Quotientenräume linear isomorph (siehe später) zu mehr vertrauten Vektorräumen sind.