

Lineare Abbildungen - I

Definition. Seien V und W \mathbb{K} -Vektorräume (über demselben \mathbb{K}).

Eine Abbildung $F : V \rightarrow W$ heißt **\mathbb{K} -linear**, wenn

$$\text{L1) } F(v + w) = F(v) + F(w) \quad \forall v, w \in V$$

$$\text{L2) } F(\lambda v) = \lambda F(v) \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Somit ist eine lineare Abbildung "verträglich" mit den Vektorraumstrukturen. Man sieht leicht, dass die Bedingungen L1) und L2) gleichbedeutend sind mit

$$\text{L) } F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w) \quad \forall v, w \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Mittels vollständiger Induktion kann man dann zeigen, dass aus der Linearität von $F : V \rightarrow W$ folgt, dass

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + \dots + \lambda_n F(v_n)$$

gilt für $v_1, \dots, v_n \in V$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$.

In anderen Worten: eine lineare Abbildung führt eine Linearkombination von Vektoren in V in die entsprechende Linearkombination der Bildvektoren über.

Grundlegende Eigenschaften. Sei $F : V \rightarrow W$ linear.

- $F(0) = 0$, $F(v - w) = F(v) - F(w) \quad \forall v, w \in V$

Beweis: Wähle $v \in V$. Wegen $0 = 0 \cdot v$ gilt dann $F(0) = F(0 \cdot v) = 0 \cdot F(v) = 0$. Weiters ist $F(v - w) = F(v + (-1)w) = F(v) + (-1)F(w) = F(v) - F(w)$.

- (v_i) linear abhängig in $V \Rightarrow (F(v_i))$ linear abhängig in W

Beweis: folgt sofort aus

$$\lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_k v_{i_k} = 0 \Rightarrow \lambda_1 F(v_{i_1}) + \dots + \lambda_k F(v_{i_k}) = F(0) = 0.$$

- $(F(v_i))$ linear unabhängig in $W \Rightarrow (v_i)$ linear unabhängig in V

Beweis: folgt sofort aus der vorigen Aussage.

- $V' \triangleleft V \Rightarrow F(V') \triangleleft W$

Beweis: Seien $w_1, w_2 \in F(V')$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Dann existieren $v_1, v_2 \in V'$ mit $F(v_1) = w_1$ und $F(v_2) = w_2$. Nun gilt $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) = F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in F(V')$, weil $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in V'$.

- $W' \triangleleft W \Rightarrow F^{-1}(W') \triangleleft V$

Beweis: Seien $v_1, v_2 \in F^{-1}(W')$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. Dann gilt $F(v_1), F(v_2) \in W'$ und damit auch $F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) \in W'$. Dies bedeutet aber, dass $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in F^{-1}(W')$.

- $\dim F(V) \leq \dim V$

Beweis: folgt unmittelbar aus der dritten Aussage.

- Man beachte weiters, dass aus der linearen Unabhängigkeit von (v_i) i.a. **nicht** folgt, dass $(F(v_i))$ linear unabhängig ist (siehe Nullabbildung).

Beispiele.

1) Die **Nullabbildung** $F : V \rightarrow W$ mit $F(v) = 0 \quad \forall v \in V$ ist linear.

2) Die **identische Abbildung** $F : V \rightarrow V$ mit $F(v) = v \quad \forall v \in V$ ist linear.

3) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$ fest. Dann ist die Abbildung $F : V \rightarrow V$ mit $F(v) = \lambda \cdot v$ linear.

4) Sei X eine beliebige Menge, $V = \text{Abb}(X, \mathbb{R})$ und $\varphi : X \rightarrow X$ eine beliebige Abbildung.

Dann ist $F : V \rightarrow V$ mit $F(f) = f \circ \varphi$ linear.

5) Die Abbildung $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f \rightarrow f'$ ist linear.

6) Für festes $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \rightarrow f(x_0)$ linear.

Eine Schreibweise. : Für $v = (v_1, \dots, v_n), w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{K}^n$ setzen wir

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n = \sum_{j=1}^n v_j w_j \in \mathbb{K}$$

Dann sind offenbar folgende Eigenschaften erfüllt:

- $\langle v, 0 \rangle = 0$, $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{K}^n$
- $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle \quad \forall v, v', w \in \mathbb{K}^n$
- $\langle \lambda v, w \rangle = \langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K}$

Mit dieser Notation können nun folgende wichtige Beispiele für lineare Abbildungen angegeben werden.

1) Für jedes feste $w \in \mathbb{K}^n$ ist die Abbildung $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ mit $F(v) = \langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^n v_j w_j$ linear.

2) Sei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$. Wir wollen damit eine Abbildung $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ definieren.

Für $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ sei

$$F(v) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \right) = (\langle a_1, v \rangle, \langle a_2, v \rangle, \dots, \langle a_m, v \rangle)$$

wobei a_1, a_2, \dots, a_m die Zeilenvektoren von A bezeichnen.

Dann ist $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ linear und somit kann jeder $m \times n$ Matrix auf natürliche Weise eine lineare Abbildung $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ zugeordnet werden!

$$\begin{aligned} F(v + v') &= (\langle a_1, v + v' \rangle, \langle a_2, v + v' \rangle, \dots, \langle a_m, v + v' \rangle) = \\ &= (\langle a_1, v \rangle + \langle a_1, v' \rangle, \langle a_2, v \rangle + \langle a_2, v' \rangle, \dots, \langle a_m, v \rangle + \langle a_m, v' \rangle) = \\ &= (\langle a_1, v \rangle, \langle a_2, v \rangle, \dots, \langle a_m, v \rangle) + (\langle a_1, v' \rangle, \langle a_2, v' \rangle, \dots, \langle a_m, v' \rangle) = F(v) + F(v') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\lambda v) &= (\langle a_1, \lambda v \rangle, \langle a_2, \lambda v \rangle, \dots, \langle a_m, \lambda v \rangle) = (\lambda \langle a_1, v \rangle, \lambda \langle a_2, v \rangle, \dots, \lambda \langle a_m, v \rangle) = \\ &= \lambda (\langle a_1, v \rangle, \langle a_2, v \rangle, \dots, \langle a_m, v \rangle) = \lambda F(v) \end{aligned}$$

3) Sei nun $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ linear und (e_1, e_2, \dots, e_n) die kanonische Basis von \mathbb{K}^n .

Für $j = 1, \dots, n$ sei $F(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ und bilde damit eine $m \times n$ -Matrix A , wobei offenbar die j -te Spalte von A gleich $F(e_j)$ ist.

Damit kann einer linearen Abbildung $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ auf natürliche Weise eine $m \times n$ Matrix A zugeordnet werden.

Für $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ und damit

$$\begin{aligned} F(v) &= x_1 F(e_1) + \dots + x_n F(e_n) = \\ &= x_1 (a_{11}, \dots, a_{m1}) + x_2 (a_{12}, \dots, a_{m2}) + \dots + x_n (a_{1n}, \dots, a_{mn}) = \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \right) \end{aligned}$$

Dies bedeutet aber, dass die dieser Matrix A nach 2) zugeordnete lineare Abbildung genau jene Abbildung ist, von der wir gestartet sind!

Zur Bestimmung von linearen Abbildungen $F : V \rightarrow W$ ist folgende Aussage von Bedeutung, welche besagt, dass eine lineare Abbildung bereits dadurch eindeutig bestimmt ist, wenn die Bilder von Basisvektoren bekannt sind.

Satz. Seien V und W \mathbb{K} -Vektorräume, $(v_i)_{i \in I}$ eine Basis in V und $(w_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie in W .

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $F : V \rightarrow W$ mit der Eigenschaft $F(v_i) = w_i \quad \forall i \in I$.

Beweis. (Verwende die Schreibweise $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$)

i) **Eindeutigkeit:**

Seien $F, G : V \rightarrow W$ mit $F(v_i) = G(v_i) = w_i \quad \forall i \in I$. Für $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ gilt dann $F(v) = F(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i F(v_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i = \sum_{i \in I} \lambda_i G(v_i) = G(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i) = G(v)$.

Also ist $F = G$.

ii) **Existenz:**

Sei $v \in V$. Dann ist $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$. Definiere nun $F(v) = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i$.

Für $v, v' \in V$ seien $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ und $v' = \sum_{i \in I} \mu_i v_i$.

Dann ist $v+v' = \sum_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) v_i$ und damit $F(v+v') = F(\sum_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) v_i) = \sum_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) w_i = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i + \sum_{i \in I} \mu_i w_i = F(v) + F(v')$.

Analog zeigt man, dass $F(\lambda v) = \lambda F(v)$.

F ist somit linear und hat offenbar die Eigenschaft, dass $F(v_i) = w_i$ für alle $i \in I$. \square

Bemerkung. Ist $\dim V = n$ und (v_1, v_2, \dots, v_n) eine Basis von V , (w_1, w_2, \dots, w_n) eine beliebige Familie aus W , dann gilt für $v \in V$ mit $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ damit $F(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$.

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes gilt weiters

- a) $F(V) = \text{Span}(w_i)$
- b) F ist injektiv $\Leftrightarrow (w_i)$ ist linear unabhängig

Beweis.

zu a) : Offenbar ist $F(V) \subseteq \text{Span}(w_i)$.

Sei nun $w \in \text{Span}(w_i)$, etwa $w = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i$. Setze $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \in V$. Dann ist $F(v) = w$, also ist auch $\text{Span}(w_i) \subseteq F(V)$ und damit $F(V) = \text{Span}(w_i)$.

zu b) :

" \Rightarrow " : Sei $\lambda_1 w_{i_1} + \dots + \lambda_r w_{i_r} = 0$. Setze $v = \lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_r v_{i_r}$. Dann ist $F(v) = 0$. Weil F injektiv ist und bereits $F(0) = 0$ ist, muß $v = 0$ sein. Weil $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$ linear unabhängig ist, muß $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ sein. Also ist (w_i) linear unabhängig.

" \Leftarrow " : Sei $F(v) = 0$ und $v = \lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_r v_{i_r}$. Dann ist $\lambda_1 w_{i_1} + \dots + \lambda_r w_{i_r} = 0$, und laut Voraussetzung folgt damit $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$. Somit

gilt $v = 0$.

Ist nun $F(v) = F(v')$, dann $F(v - v') = 0$ und somit $v - v' = 0$ bzw. $v = v'$. Dies heißt, dass F injektiv ist. \square

Beispiel. Sei $V = W = \mathbb{R}^2$.

$v_1 = (1, 1)$, $v_2 = (0, 1)$ bilden eine Basis von V . Sei $w_1 = (2, -3)$, $w_2 = (1, 2)$.

Dann gibt es gemäß vorher genau eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $F(v_1) = w_1$ und $F(v_2) = w_2$.

Frage: $F(v) = ?$ für beliebiges $v \in \mathbb{R}^2$

Sei $v = (x_1, x_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1(1, 1) + \lambda_2(0, 1) = (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)$.

Dann gilt $\lambda_1 = x_1$ und $\lambda_1 + \lambda_2 = x_2$ bzw. $\lambda_2 = x_2 - x_1$.

$F(v) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$, also $F(x_1, x_2) = x_1(2, -3) + (x_2 - x_1)(1, 2) = (x_1 + x_2, -5x_1 + 2x_2)$.