Weitere Matrizenoperationen

Wie bereits erwähnt, ist $M(m \times n; \mathbb{K})$, die Menge der $m \times n$ Matrizen mit Elementen aus $\mathbb{K}$, ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension mn .

1) Betrachte nun die Abbildung $\Phi : M(m \times n; \mathbb{K}) \to \mathbb{K}^{m \cdot n}$ mit

$$A = (a_{ij}) \;\mapsto\; (a_{11}, .., a_{1n}, a_{21}, .., a_{2n}, ..., a_{m1}, .., a_{mn})$$

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \;\mapsto\; (3, 0, 1, 2, -1, 2, 1, 1, 5) \in \mathbb{R}^9$$

Offenbar ist Φ bijektiv. Wir zeigen, dass Φ auch linear ist.

Für $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{K})$ gilt

$\Phi(A + B) = (a_{11} + b_{11}, .., a_{1n} + b_{1n}, ..., a_{m1} + b_{m1}, .., a_{mn} + b_{mn}) =$
$(a_{11}, ..., a_{nm}) + (b_{11}, ..., b_{nm}) = \Phi(A) + \Phi(B)$

Analog wird $\Phi(\lambda A) = \lambda \Phi(A)$ gezeigt.

Somit ist Φ ein Isomorphismus !

Ist (e_{ij}) die kanonische Basis in $K^{m \cdot n}$, dann ist $\Phi^{-1}(e_{ij}) = E_{ij}$. Die Urbilder der Vektoren der kanonischen Basis von $K^{m \cdot n}$ liefern also die Vektoren der kanonischen Basis von $M(m \times n; \mathbb{K})$.

2) (Die transponierte Matrix)

Sei $A = (a_{ij})$ eine $m \times n$ Matrix. Dann heißt die $n \times m$ Matrix ${}^tA = (a_{ji})$ die zu A **transponierte Matrix** .

${}^tA$ entsteht also aus A durch Vertauschen von Zeilen und Spalten.

Beispiel.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Folgende Eigenschaften sind für $A, B \in M(m \times n; \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ sofort nachgewiesen:

- ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB \quad , \quad {}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA) \quad , \quad {}^t({}^tA) = A$.

3) (Multiplikation von Matrizen)

Unter gewissen Voraussetzungen können zwei Matrizen auch multipliziert werden.

Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n; \mathbb{K})$ und $B = (a_{jk}) \in M(n \times r; \mathbb{K})$, d.h.

Spaltenanzahl von A $=$ **Zeilenanzahl von** B .

Dann ist die $m \times r$ Matrix $A \cdot B = (c_{ik})$ folgendermaßen definiert:

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk} = \langle a_i, b^k \rangle$$

wobei a_i den i-ten Zeilenvektor von A und b^k den k-ten Spaltenvektor von B bezeichnet, und $i = 1, 2, .., m \quad , \quad k = 1, 2, .., r$.

$A \cdot B$ heißt das **Produkt von A mit B** .

Bemerkungen.

i) $A \cdot B$ ist also **nur dann** erklärt, wenn Spaltenanzahl von A $=$ Zeilenanzahl von B .

ii) Die Matrizenmultiplikation liefert somit eine Abbildung

$$M(m \times n; \mathbb{K}) \times M(n \times r; \mathbb{K}) \to M(m \times r; \mathbb{K}) \quad , \quad (A, B) \mapsto A \cdot B \; .$$

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Gilt $m = n = r$, dann kann sowohl $A \cdot B$ als auch $B \cdot A$ gebildet werden.
Im allgemeinen gilt aber, dass $A \cdot B \neq B \cdot A$, d.h. die Multiplikation von Matrizen ist **nicht** kommutativ.

Definition. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ heißt die quadratische Matrix

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ 0 & .. & .. & 0 \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{die } n\textbf{-reihige Einheitsmatrix} .$$

Für $E_n = (e_{ij})$ gilt offensichtlich, dass $e_{ij} = \delta_{ij}$, wobei δ_{ij} das sog. **Kroneckersymbol** bezeichnet $(\delta_{ij} = 1$ wenn $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ wenn $i \neq j)$.

Die nachfolgenden **Eigenschaften** und **Rechenregeln** können durch Ausrechnen von linker und rechter Seite leicht verifiziert werden.

Seien $A, A' \in M(m \times n; \mathbb{K})$, $B, B' \in M(n \times r; \mathbb{K})$, $C \in M(r \times s; \mathbb{K})$ und $\lambda \in \mathbb{K}$.

1) $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$, $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$

2) $A \cdot (\lambda B) = (\lambda A) \cdot B = \lambda(A \cdot B)$

3) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

4) ${}^t(A \cdot B) = ({}^tB) \cdot ({}^tA)$

5) $A \cdot E_n = A = E_m \cdot A$