

Koordinatensysteme

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit $\dim V = n$, und sei $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ eine Basis. Dann gilt

$$\forall v \in V \quad \overset{1}{\exists} (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n .$$

Betrachten wir die Abbildung $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \rightarrow V$ mit

$$\Phi_{\mathcal{B}}((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n ,$$

dann ist $\Phi_{\mathcal{B}}$ ein Isomorphismus.

Beweis. Weil \mathcal{B} eine Basis ist, ist $\Phi_{\mathcal{B}}$ bijektiv. Seien nun $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann ist $\Phi_{\mathcal{B}}(x + y) = (x_1 + y_1)v_1 + \dots + (x_n + y_n)v_n = (x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) + (y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) = \Phi_{\mathcal{B}}(x) + \Phi_{\mathcal{B}}(y)$ und $\Phi_{\mathcal{B}}(\lambda x) = (\lambda x_1)v_1 + \dots + (\lambda x_n)v_n = \lambda(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) = \lambda \Phi_{\mathcal{B}}(x)$. Damit ist $\Phi_{\mathcal{B}}$ auch linear. \square

Bemerkung. Sind e_1, \dots, e_n die kanonischen Basisvektoren in \mathbb{K}^n , dann gilt offenbar $\Phi_{\mathcal{B}}(e_i) = v_i$.

Der Isomorphismus $\Phi_{\mathcal{B}}$ heißt auch ein **Koordinatensystem** in V .

Somit: Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit $\dim V = n$. Durch Wahl einer Basis \mathcal{B} in V erhalten wir ein Koordinatensystem $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \rightarrow V$.

Zu $v \in V$ heißt $x = (x_1, \dots, x_n) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1}(v)$ der **Koordinatenvektor** von v bzgl. \mathcal{B} . Dabei gilt $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$.

Beispiele.

1) $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ mit $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, -1, 0)$ ist eine Basis des \mathbb{R}^3 .

Gesucht ist der Koordinatenvektor von $v = (1, -1, 2)$ bzgl. \mathcal{B} .

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 \Rightarrow (1, -1, 2) = x_1(2, -1, 3) + x_2(0, 1, 1) + x_3(1, -1, 0)$$

Daraus folgt durch Vergleich der Komponenten

$$1 = 2x_1 + x_3, \quad -1 = -x_1 + x_2 - x_3, \quad 2 = 3x_1 + x_2, \quad \text{und weiters}$$

$x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -1$. Somit ist $x = (1, -1, -1)$ der Koordinatenvektor von v bzgl. \mathcal{B} .

2) Ist \mathcal{B} die kanonische Basis im \mathbb{R}^3 , dann ist der Koordinatenvektor von $v = (v_1, v_2, v_3)$ bzgl. \mathcal{B} offenbar gleich (v_1, v_2, v_3) , weil $v = v_1(1, 0, 0) + v_2(0, 1, 0) + v_3(0, 0, 1)$.

3) In $V = \mathbb{P}_2$ sei die Basis $\mathcal{B} = (1, 1 + t, 1 + t + t^2)$ gegeben.

Gesucht ist der Koordinatenvektor von $v = 6 - t^2$.

Für alle $t \in \mathbb{R}$ muß damit gelten:

$$6 - t^2 = x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot (1 + t) + x_3 \cdot (1 + t + t^2) = (x_1 + x_2 + x_3) + (x_2 + x_3) \cdot t + x_3 \cdot t^2$$

Koeffizientenvergleich ergibt $x_3 = -1$, damit $x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 1$. Aus $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ folgt schließlich $x_1 = 6$. Also ist $x = (6, 1, -1)$.