Basiswechsel und Koordinatentransformation

Gegeben sei ein $\mathbb{K}$-Vektorraum V mit $\dim V = n$. Ist $\mathcal{A} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ eine Basis von V , dann liefert $\mathcal{A}$ bekanntlich ein Koordinatensystem $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^n \to V$ mittels $(x_1, x_2, ...x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto x_1 v_1 + ... + x_n v_n \in V$.

Ist $v = x_1 v_1 + ... + x_n v_n \in V$, dann heißt $x = (x_1, x_2, ...x_n)$ der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{A}$.

Ist nun $\mathcal{B} = (w_1, w_2, ..., w_n)$ eine weitere Basis von V (mit Koordinatensystem $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to V$ bzw. $(y_1, y_2, ...y_n) \mapsto y_1 w_1 + ... + y_n w_n$) , dann stellt sich die

Frage. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koordinatenvektoren bzgl. $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$?

Dazu betrachten wir

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[r, "L(T)"] \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{A}}"'] & \mathbb{K}^n \arrow[d, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\ V \arrow[r, "id_V"'] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{K}^n \arrow[rr, "L(T)"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{A}}"'] & & \mathbb{K}^n \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Die lineare Abbildung $L(T) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ wird durch die Matrix $T = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$ beschrieben.

Dieses Diagramm beschreibt die **Koordinatentransformation**, die Matrix T heißt **Transformationsmatrix** des Basiswechsels $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$, bzw. kurz Transformationsmatrix.

Offenbar gilt für ein $v \in V$, dass $y = Tx$, wobei x der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{A}$ ist und y der Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$ ist.

Problemstellung. Die Basisvektoren von $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_n)$ seien gegeben als Linearkombination der Vektoren von $\mathcal{A} = (v_1, ..., v_n)$. Man bestimme die Transformationsmatrix von $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$.

Sei

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + ... + a_{n1}v_n$$

$$w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + ... + a_{n2}v_n$$

....

$$w_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + ... + a_{nn}v_n$$

Man trage nun die Koeffizienten von w_j als **j-te Spalte** in eine Matrix S ein.

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & .. & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dies heißt aber, dass S die darstellende Matrix von id_V bzgl. $\mathcal{B}, \mathcal{A}$ ist bzw. $S = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}(\mathrm{id}_V)$.

In anderen Worten: S ist die Transformationsmatrix von $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{A}$, und damit ist $T = S^{-1}$ die gesuchte Transformtionsmatrix von $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$.

Damit stellt sich die Frage nach der Bestimmung der inversen Matrix S^{-1} von S .

Algorithmus zur Bestimmung der inversen Matrix
(Beweis folgt später)

Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$

1) Schreibe A und die Einheitsmatrix E_n nebeneinander und führe alle Operationen, die an der linken Matrix (zu Beginn A) vorgenommen werden, in gleicher Weise an der rechten Matrix (zu Beginn E_n) durch.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & .. & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & .. & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & .. & .. & 1 \end{pmatrix}$$

2) Durch Zeilenumformungen bringe A auf Zeilenstufenform.

Ist Zeilenrang $A < n$, dann ist A nicht invertierbar.

Ist Zeilenrang $A = n$, dann erzeuge durch Zeilenumformungen jeweils "1" in den Elementen der Hauptdiagonale.

3) Durch weitere Zeilenumformungen erzeuge links E_n . Die Matrix auf der rechten Seite ist dann schließlich A^{-1} .

Beispiel. Siehe Tafel.