

# Basiswechsel und Koordinatentransformation

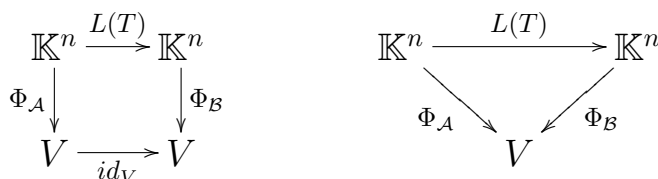
Gegeben sei ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$  mit  $\dim V = n$ . Ist  $\mathcal{A} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ , dann liefert  $\mathcal{A}$  bekanntlich ein Koordinatensystem  $\Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^n \rightarrow V$  mittels  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mapsto x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in V$ .

Ist  $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \in V$ , dann heißt  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  der Koordinatenvektor von  $v$  bzgl.  $\mathcal{A}$ .

Ist nun  $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$  eine weitere Basis von  $V$  (mit Koordinatensystem  $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \rightarrow V$  bzw.  $(y_1, y_2, \dots, y_n) \mapsto y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$ ), dann stellt sich die

**Frage.** Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Koordinatenvektoren bzgl.  $\mathcal{A}$  bzw.  $\mathcal{B}$ ?

Dazu betrachten wir



Die lineare Abbildung  $L(T) = \Phi_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$  wird durch die Matrix  $T = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\text{id}_V)$  beschrieben.

Dieses Diagramm beschreibt die **Koordinatentransformation**, die Matrix  $T$  heißt **Transformationsmatrix** des Basiswechsels  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ , bzw. kurz Transformationsmatrix.

Offenbar gilt für ein  $v \in V$ , dass  $y = Tx$ , wobei  $x$  der Koordinatenvektor von  $v$  bzgl.  $\mathcal{A}$  ist und  $y$  der Koordinatenvektor von  $v$  bzgl.  $\mathcal{B}$  ist.

**Problemstellung.** Die Basisvektoren von  $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$  seien gegeben als Linearkombination der Vektoren von  $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ . Man bestimme die Transformationsmatrix von  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ .

Sei

$$w_1 = a_{11}v_1 + a_{21}v_2 + \dots + a_{n1}v_n$$

$$w_2 = a_{12}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{n2}v_n$$

.....

$$w_n = a_{1n}v_1 + a_{2n}v_2 + \dots + a_{nn}v_n$$

Man trage nun die Koeffizienten von  $w_j$  als  $j$ -te **Spalte** in eine Matrix  $S$  ein.

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dies heißt aber, dass  $S$  die darstellende Matrix von  $\text{id}_V$  bzgl.  $\mathcal{B}, \mathcal{A}$  ist bzw.  $S = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\text{id}_V)$ .

In anderen Worten:  $S$  ist die Transformationsmatrix von  $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{A}$ , und damit ist  $T = S^{-1}$  die gesuchte Transformationsmatrix von  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ .

Damit stellt sich die Frage nach der Bestimmung der inversen Matrix  $S^{-1}$  von  $S$ .

### Algorithmus zur Bestimmung der inversen Matrix

(Beweis folgt später)

Sei  $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$

1) Schreibe  $A$  und die Einheitsmatrix  $E_n$  nebeneinander und führe alle Operationen, die an der linken Matrix (zu Beginn  $A$ ) vorgenommen werden, in gleicher Weise an der rechten Matrix (zu Beginn  $E_n$ ) durch.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

2) Durch Zeilenumformungen bringe  $A$  auf Zeilenstufenform.

Ist Zeilenrang  $A < n$  , dann ist  $A$  nicht invertierbar.

Ist Zeilenrang  $A = n$  , dann erzeuge durch Zeilenumformungen jeweils "1"  
in den Elementen der Hauptdiagonale.

3) Durch weitere Zeilenumformungen erzeuge links  $E_n$  . Die Matrix auf  
der rechten Seite ist dann schließlich  $A^{-1}$  .

**Beispiel.** Siehe Tafel.