

Äquivalenz von Matrizen

Wir befassen uns jetzt mit der Fragestellung, ob man zu einer gegebenen linearen Abbildung $F : V \rightarrow W$ geeignete Basen für V und W finden kann, sodass die darstellende Matrix von F "möglichst einfach" wird.

Seien also V und W \mathbb{K} -Vektorräume, $\dim V = n$, $\dim W = m$ und $F : V \rightarrow W$ linear.

Des weiteren seien \mathcal{A} , \mathcal{A}' zwei Basen von V , und \mathcal{B} , \mathcal{B}' zwei Basen von W .

Wir setzen $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ und $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(F)$, und fragen, in welcher Weise A und B zusammenhängen.

Dazu betrachten wir das (kommutative) Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L(A)} & \mathbb{K}^m \\
 \Phi_{\mathcal{A}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}} \\
 V & \xrightarrow{F} & W \\
 \Phi_{\mathcal{A}'} \uparrow & & \uparrow \Phi_{\mathcal{B}'} \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L(B)} & \mathbb{K}^m
 \end{array}$$

mit den Bezeichnungen

$$L(A) : x \mapsto y = Ax \quad , \quad L(B) : x' \mapsto y' = Bx'$$

$$(\Phi_{\mathcal{A}'})^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{A}} : x \mapsto x' = Tx \quad , \quad (\Phi_{\mathcal{B}'})^{-1} \circ \Phi_{\mathcal{B}} : y \mapsto y' = Sy$$

(T ist die Transformationsmatrix des Basiswechsels $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}'$, S ist die Transformationsmatrix des Basiswechsels $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}'$)

Also gilt $x' = Tx$, $y' = Sy$, $y = Ax$, $y' = Bx'$ und damit

$$Sy = Bx' = B(Tx) = (BT)x . \text{ Mit } y = Ax \text{ gilt dann}$$

$$(SA)x = (BT)x \quad \forall x \in \mathbb{K}^n \quad \text{und damit} \quad SA = BT . \text{ Folglich}$$

Transformationsformel für darstellende Matrizen : $B = SAT^{-1}$.

Nun beantworten wir die Frage, was die "einfachste Form" einer darstellenden Matrix ist.

Lemma. Sei $F : V \rightarrow W$ linear. Weiters gelte $\dim V = n$, $\dim W = m$ und $\text{Rg} F = r$.

Dann existieren Basen \mathcal{A} und \mathcal{B} von V bzw. W , sodass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Sei (w_1, \dots, w_r) eine Basis von $\text{Im} F$. Ergänze diese Basis zu einer Basis $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_r, w_{r+1}, \dots, w_m)$ von W .

Im Beweis der Dimensionsformel wurde gezeigt, dass es dann eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_k)$ von V gibt mit

$$u_1, \dots, u_k \in \text{Ker} F, \quad F(v_i) = w_i \quad \text{für } i = 1, \dots, r, \quad r + k = n.$$

Damit gilt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad \square$$

Bemerkung. Ist $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$, dann hat die Abbildung $x \mapsto Ax$ offenbar die Form $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$, ist also, geometrisch gesehen, die Projektion von (x_1, x_2, \dots, x_n) auf die ersten r Koordinaten.

Bemerkung. Sei $F : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung und $G : V' \rightarrow V$ und $H : W \rightarrow W'$ Isomorphismen.

Dann ist offenbar $\text{Rg} F = \text{Rg}(H \circ F \circ G)$.

Sei nun $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$, S eine invertierbare $m \times m$ Matrix und T eine invertierbare $n \times n$ Matrix. Dann ist auch T^{-1} invertierbar.

Seien $L(A) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$, $L(S) : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^m$ und $L(T^{-1}) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ die durch A , S bzw. T^{-1} definierten linearen Abbildungen.

Dann sind $L(S)$ und $L(T^{-1})$ Isomorphismen, und es gilt

$$L(S) \circ L(A) \circ L(T^{-1}) = L(SAT^{-1}) .$$

Mit der vorhergehenden Beobachtung ist damit

$$\operatorname{RgL}(SAT^{-1}) = \operatorname{RgL}(A) .$$

Dies heißt aber : Spaltenrang $A =$ Spaltenrang (SAT^{-1}) .

Ebenso gilt : Zeilenrang $A =$ Zeilenrang (SAT^{-1}) .

(Zeilenrang $A =$ Spaltenrang ${}^t A =$ Spaltenrang $(({}^t T^{-1})({}^t A)({}^t S)) =$
Spaltenrang ${}^t(SAT^{-1}) =$ Zeilenrang (SAT^{-1}) .)

Damit können wir nun zeigen, dass Spaltenrang und Zeilenrang für jede Matrix stets übereinstimmen.

Satz. Sei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$.

Dann gilt Zeilenrang $A =$ Spaltenrang A .

Beweis.

Sei $L(A) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ die durch A definierte lineare Abbildung.

Dann ist A die darstellende Matrix von $L(A)$, wenn in \mathbb{K}^n bzw. \mathbb{K}^m die kanonischen Basen gewählt werden.

Durch Wahl geeigneter Basen hat $L(A)$ eine darstellende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{siehe vorher}) .$$

Die Transformationsformel besagt, dass es invertierbare Matrizen S und T gibt mit $B = SAT^{-1}$.

Offensichtlich gilt Zeilenrang $B =$ Spaltenrang $B = r$.

Damit ist auch Zeilenrang $A =$ Spaltenrang $A = r$. \square

Ohne Beweis sei noch eine Aussage angeführt, welche Auskunft über den Rang des Produktes von zwei Matrizen gibt.

Ungleichung von Sylvester.

Sei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ und $B \in M(n \times r; \mathbb{K})$. Dann gilt

$$\operatorname{Rg}A + \operatorname{Rg}B - n \leq \operatorname{Rg}(A \cdot B) \leq \min\{\operatorname{Rg}A, \operatorname{Rg}B\}$$

Definition. Seien $A, B \in M(m \times n; \mathbb{K})$.

Dann heißt B **äquivalent zu** A , $B \sim A$, wenn es invertierbare Matrizen $S \in M(m \times m; \mathbb{K})$ und $T \in M(n \times n; \mathbb{K})$ gibt, sodass $B = SAT^{-1}$.

Bemerkung. Die Äquivalenz von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation auf $M(m \times n; \mathbb{K})$. (Aufgabe !)

Bemerkung. Aus den vorhergehenden Überlegungen folgt :

$$B \sim A \Rightarrow \operatorname{Rg}A = \operatorname{Rg}B .$$

D.h. Äquivalente Matrizen sind gleichrangig.

Das folgende Resultat besagt, dass auch die Umkehrung dieser Aussage gilt.

Satz. Für $A, B \in M(m \times n; \mathbb{K})$ sind gleichwertig

- 1) $B \sim A$,
- 2) $\operatorname{Rg}A = \operatorname{Rg}B$.

Beweis. Zu zeigen ist $2) \Rightarrow 1)$: Gelte also $\operatorname{Rg}A = \operatorname{Rg}B = r$.

Betrachte die lineare Abbildung $L(A) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ mit $L(A)(x) = Ax$. Dann ist $\operatorname{Rg}L(A) = r$.

Nun gibt es Basen \mathcal{A} bzw. \mathcal{B} von \mathbb{K}^n bzw. \mathbb{K}^m sodass

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(L(A)) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sei $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ die lineare Abbildung, die durch $F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ gegeben ist.

Damit erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{F} & \mathbb{K}^m \\ \Phi_A \downarrow & & \downarrow \Phi_B \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{L(A)} & \mathbb{K}^m \end{array}$$

Dies wiederum bedeutet, dass A die darstellende Matrix der Abbildung F bzgl. der Koordinatensysteme $(\Phi_A)^{-1}$ und $(\Phi_B)^{-1}$ ist !!

Auf analoge Weise folgt, dass B die darstellende Matrix von F bzgl. geeigneter anderer Koordinatensysteme $(\Phi_{A'})^{-1}$ und $(\Phi_{B'})^{-1}$ ist.

Damit muß wegen der Transformationsformel $B = SAT^{-1}$ gelten, also $B \sim A$. \square

Bemerkung. Aus dem Vorhergehenden folgt u.a. :

jede Matrix $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ ist zu einer $m \times n$ Matrix B der Form $B = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ äquivalent.