Lineare Gleichungssysteme

Definition. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ und $b_1, ..., b_m \in \mathbb{K}$.

Dann heißt

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\
&.......... \\
&.......... \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}$$

ein **lineares Gleichungssystem** (mit m Gleichungen und n Unbestimmten $x_1, x_2, ..., x_n$ und Koeffiezienten $a_{ij} \in \mathbb{K}$) .

Die $m \times n$ Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & .. & a_{1n} \\ a_{21} & .. & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & .. & .. & a_{mn} \end{pmatrix}$ heißt **Koeffizientenmatrix**.

In **Matrizenschreibweise** kann somit ein lineares Gleichungssystem in der Form $Ax = b$ geschrieben werden, wobei

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix} .$$

Man spricht von einem **homogenen Gleichungssystem**, wenn $Ax = 0$ (d.h. $b = 0$) . Wenn $b \neq 0$, liegt ein **inhomogenes Gleichungssystem** vor.

I. Homogene Gleichungssysteme

haben also die Form $Ax = 0$. Gesucht sind die **Lösungen** von $Ax = 0$, d.h. alle Vektoren $x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax = 0$.

Die Menge $W = \{x \in \mathbb{K}^n \; : \; Ax = 0\}$ heißt der **Lösungsraum** (des Gleichungssystems $Ax = 0$) .

Betrachten wir dazu die lineare Abbildung $L(A) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $L(A)(x) = Ax$. Dann ist offenbar

- $W = \mathrm{Ker}L(A) \lhd \mathbb{K}^n$.

Die Dimensionsformel besagt $\dim\mathbb{K}^n = \dim\mathrm{Im}L(A) + \dim\mathrm{Ker}L(A)$.

Zusammen mit $\mathrm{Rg}A = \dim\mathrm{Im}L(A)$ erhalten wir somit

- $\dim W = n - \mathrm{Rg}A$.

Um die Lösungsgesamtheit eines homogenen Gleichungssystems $Ax = 0$ zu bestimmen, müssen wir also eine Basis von W finden.

Beobachtung. Sei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ und $S \in M(m \times m; \mathbb{K})$ eine **invertierbare** Matrix.

Dann haben die Gleichungssysteme $Ax = 0$ und $(SA)x = 0$ die gleichen Lösungsräume.

Beweis. i) $Ax = 0 \;\Rightarrow\; (SA)x = S(Ax) = S \cdot 0 = 0$.

ii) $(SA)x = 0 \;\Rightarrow S(Ax) = 0 \;\Rightarrow$

$Ax = E_m Ax = S^{-1}S(Ax) = S^{-1} \cdot 0 = 0$. $\square$

Folglich : Entsteht B aus A durch elementare Zeilenumformungen, dann haben $Ax = 0$ und $Bx = 0$ gleiche Lösungsräume (weil jeder elementaren Zeilenumformung die Multiplikation von links mit einer geeigneten Elementarmatrix enspricht) .

Damit ergibt sich folgende Vorgangsweise zur Bestimmung von W :

1) Gegeben sei $Ax = 0$, wobei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$.

Führe A in Zeilenstufenform B über. (Dann ist der Lösungsraum von $Ax = 0$ gleich dem Lösungsraum von $Bx = 0$)

2) Seien $b_{1j_1}, b_{2j_2}, ..., b_{rj_r}$ die "Stufenelemente" von B .

Dann ist $\text{Rg}A = \text{Rg}B = r$, also $\dim W = n - r$.

Werden nun die Unbestimmten x_i mit $i \notin \{j_1, j_2, ..., j_r\}$ als frei wählbare Parameter gesetzt, dann können $x_{j_1}, x_{j_2}, ..., x_{j_r}$ durch diese Paramter ausgedrückt werden.

Damit ist der Lösungraum W vollständig beschrieben.

(Beachte: $\dim W =$ Anzahl der freien Parameter)

Beispiel. siehe Tafel.

II. Inhomogene Gleichungssysteme

haben also die Form $Ax = b$ mit $b \neq 0$.

Wir bezeichnen mit $X = \{x \in \mathbb{K}^n \ : \ Ax = b\}$ den **Lösungsraum** von $Ax = b$.

Mit $Ax = 0$ sei das **zugehörige homogene Gleichungssystem** bezeichnet.

Bemerkung. Für $b \neq 0$ ist X **kein** Untervektorraum von $\mathbb{K}^n$.

(Ist $Ax = b$ und $Ay = b$, dann ist $A(x + y) = Ax + Ay = 2b$, also $x, y \in X$, aber $x + y \notin X$)

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Eine Teilmenge $X \subseteq V$ heißt **affiner Unterraum**, wenn
$\exists\, v \in V \ \ \exists\, W \lhd V$ mit $X = v + W$.

($\emptyset$ ist per definition ein affiner Unterraum)

Bemerkung. Sei $X = v + W$ ein affiner Unterraum. Dann gilt

i) $\forall\, v' \in X \ : \ X = v' + W$

ii) gilt $X = v + W = v' + W'$ (mit $W, W' \lhd V$) , dann ist $W = W'$ und $v - v' \in W$ (d.h. der beteiligte Unterraum von X ist eindeutig bestimmt) .

Beweis.

zu i) : Sei $v' \in X$. Dann $\exists\, w^* \in W$ mit $v' = v + w^*$.

Zu $x \in X$ $\exists\, w \in W$ mit $x = v + w$. Folglich $x = (v' - w^*) + w = v' + (w - w^*) \in v' + W$. Also $X \subseteq v' + W$.

Zu $x \in v' + W$ $\exists\, w \in W$ mit $x = v' + w$. Folglich $x = (v + w^*) + w = v + (w^* + w) \in v + W = X$. Also $v' + W \subseteq X$.

Insgesamt: $X = v' + W$.

zu ii) $v = v + 0 \in v + W = v' + W' \;\Rightarrow\; \exists\, w^* \in W'$ mit $v = v' + w^*$.

$v' = v + 0 \in v' + W' = v + W \;\Rightarrow\; \exists\, w^{**} \in W$ mit $v' = v + w^{**}$.

Für $w \in W$ gilt nun $v + w \in v + W = v' + W'$ und damit $\exists\, w' \in W'$ mit $v + w = v' + w'$.

Also $v' + w^* + w = v' + w'$ bzw. $w = w' - w^* \in W'$.

Damit ist $W \subseteq W'$. Analog wird gezeigt, dass $W' \subseteq W$, also insgesamt $W = W'$.

Wegen $v = v' + w^*$ ist $v - v' = w^* \in W' = W$. $\square$

Damit kann nun auch auf sinnvolle Weise die **Dimension eines affinen Unterraums** definiert werden, durch

$$\dim X = \dim W \quad \text{falls } X = v + W \ (\text{und } W \lhd V)$$

Lemma. Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung.

Für jedes $w \in W$ ist dann $F^{-1}(\{w\})$ ein affiner Unterraum.

$F^{-1}(\{w\}) \neq \emptyset$ und $v \in F^{-1}(\{w\}) \;\Rightarrow\; F^{-1}(\{w\}) = v + \mathrm{Ker}F$.

Beweis. Setze $X = F^{-1}(\{w\})$.

Ist $X = \emptyset$ sind wir fertig. Sei also $X \neq \emptyset$.

Wähle $v \in X$, i.e. $F(v) = w$. Wir zeigen, dass $X = v + \mathrm{Ker}F$.

$u \in X \;\Rightarrow\; u = v + (u - v)$ und $w = F(u) = F(v) + F(u - v) = w + F(u - v) \;\Rightarrow\; F(u - v) = 0$ bzw. $u - v \in \mathrm{Ker}F$.

Damit ist $u \in v + \mathrm{Ker}F$, also $X \subseteq v + \mathrm{Ker}F$.

Ist umgekehrt $u = v + v'$ mit $v' \in \mathrm{Ker}F$, dann ist $F(u) = F(v) + F(v') = F(v) = w$, also $u \in X$.

Damit $v + \mathrm{Ker}F \subseteq X$ und insgesamt $X = v + \mathrm{Ker}F$. $\square$

Folgerung. Betrachte $Ax = b$ wobei $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$. Setze

$$X = \{x \in \mathbb{K}^n \;:\; Ax = b\} \quad \text{und} \quad W = \{x \in \mathbb{K}^n \;:\; Ax = 0\} \;.$$

Dann gilt: Falls $X \neq \emptyset$ und $v \in X$ beliebig gewählt wird, dann ist $X = v + W$.

Satz. Falls existent, erhält man die allgemeine Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems durch Addition **einer** speziellen Lösung des inhomogenen Gleichungssystems zur allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Gleichungssystems.

Beobachtungen.

- Ein homogenes Gleichungssystem $Ax = 0$ ist immer lösbar, d.h. hat immer eine Lösung, nämlich die triviale Lösung $x = 0$.

- Ein inhomogenes Gleichungssystem $Ax = b$ braucht hingegen nicht immer lösbar zu sein, wie man am Beispiel $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 + x_2 = 2$ sieht.

Dies führt zur **Frage** : Wann besitzt $Ax = b$ eine Lösung ?

Wird mit $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ die Abbildung $F(x) = Ax$ bezeichnet, dann ist $Ax = b$ klarerweise genau dann lösbar, wenn $b \in \mathrm{Im}F$.

Die Fragestellung führt zum Begriff der erweiterten Koeffizientenmatrix.

Zu $Ax = b$ mit $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ heißt

$$A' = (A, b) = \begin{pmatrix} a_{11} & .. & .. & a_{1n} & b_1 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_{m1} & .. & .. & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in M(m \times (n+1); \mathbb{K})$$

die (zugehörige) **erweiterte Koeffizientenmatrix** .

Satz. Sei $Ax = b$ mit $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ gegeben. Dann gilt

$Ax = b$ ist lösbar $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}(A, b)$

Beweis.

Betrachte $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $F(x) = Ax$, und $F' : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}^m$ mit $F'(x') = A'x$.

Seien $(e_1, e_2, ..., e_n)$ bzw. $(e'_1, e'_2, ..., e'_{n+1})$ die kanonischen Basen von $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^{n+1}$.

Dann gilt $F(e_1) = F'(e'_1), ..., F(e_n) = F'(e'_n)$ sowie $F'(e'_{n+1}) = b$.

Weiters ist $\mathrm{Im}F \subseteq \mathrm{Im}F'$ und $b \in \mathrm{Im}F'$.

"$\Rightarrow$" : $\exists\, x \in \mathbb{K}^n$ mit $Ax = b \Rightarrow b \in \mathrm{Im}F$. Also ist b Linearkombination von $F(e_1), ..., F(e_n)$.

Dann ist aber $\mathrm{Im}F = \mathrm{Im}F'$ und damit $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A'$.

"$\Leftarrow$" : Ist $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A'$, dann ist $\mathrm{Im}F = \mathrm{Im}F'$, also ist $b \in \mathrm{Im}F$. $\square$

Definition. Eine Matrix $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ liefert ein **universell lösbares Gleichungssystem**, wenn das Gleichungssystem $Ax = b$ lösbar ist **für jedes** $b \in \mathbb{K}^m$.

(d.h. die Abbildung $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $F(x) = Ax$ ist surjektiv)

Bemerkung.
$A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ liefert ein universell lösbares Gleichungssystem $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Rg}A = m$.

Definition. Ein Gleichungssystem $Ax = b$ mit $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ heißt **eindeutig lösbar**, wenn

$$\overset{1}{\exists}\ x \in \mathbb{K}^n \quad \text{mit} \quad Ax = b\ .$$

Bemerkung. Sei $F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $F(x) = Ax$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1) $Ax = b$ ist eindeutig lösbar,

2) $Ax = b$ ist lösbar und $\mathrm{Ker}F = \{0\}$,

3) $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A' = n$.

Beweis.

1) $\Rightarrow$ 2) : Ist $Ax = b$ eindeutig lösbar, dann sicherlich auch lösbar. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit von $Ax = b$ darf das zugehörige homogene Gleichungssystem $Ax = 0$ **nur** die triviale Lösung besitzen, also $\mathrm{Ker}F = \{0\}$.

2) $\Rightarrow$ 3) : Weil $Ax = b$ lösbar ist, ist $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A'$. Weil $\mathrm{Ker}F = \{0\}$, erhalten wir nach der Dimensionsformel $n = \dim\mathbb{K}^n = \dim\mathrm{Im}F = \mathrm{Rg}A$.

3) $\Rightarrow$ 1) : Aus $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A'$ folgt, dass $Ax = b$ lösbar ist. Aus der Dimensionsformel und $\mathrm{Rg}A = n$ folgt wiederum, dass $\dim\mathrm{Ker}F = 0$, also $\mathrm{Ker}F = \{0\}$ ist.

Ist $Ax = b$ und $Ax^* = b$, dann ist $A(x - x^*) = 0$, also $x - x^* \in \mathrm{Ker}F$ und damit $x = x^*$. Dies bedeutet, dass $Ax = b$ eindeutig lösbar ist. $\square$

Ein Lösungsverfahren für $Ax = b$:

Man bringe die erweiterte Matrix $A' = (A, b)$ auf Zeilenstufenform

$$(A,b) \hookrightarrow \begin{pmatrix} .. & b_{1j_1} & .. & & & & & c_1 \\ & 0 & .. & b_{2j_2} & & & & c_2 \\ & & & & .. & & & \\ & & & & & b_{rj_r} & & c_r \\ & & & & & & & .. \\ .. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ 0 & c_m \end{pmatrix}$$

Dann ist $\mathrm{Rg}A = r$, und $Ax = b$ ist lösbar genau dann, wenn $\mathrm{Rg}A = \mathrm{Rg}A' = r$ ist, also genau dann wenn $c_{r+1} = ... = c_m = 0$ ist.

A liefert ein universell lösbares Gleichungssystem, wenn

$$(A, b) \hookrightarrow \left(\begin{array}{cccccccc} .. & b_{1j_1} & .. & & & & & c_1 \\ & 0 & .. & b_{2j_2} & & & & c_2 \\ & & & & .. & & & \\ & & & & & .. & & \\ & & & & & .. & & .. \\ .. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{mj_m} & c_m \end{array} \right).$$

Beispiel. siehe Tafel.