Permutationen

$\forall\ n > 0$ sei $S_n = \{\sigma : \{1,2,...,n\} \to \{1,2,...,n\}\ :\ \sigma \text{ ist bijektiv}\}$.

Dann ist S_n eine Gruppe bzgl. der Verknüpfung von Abbildungen (vgl. früher) und heißt **symmetrische Gruppe** (vom Index n).

Die Elemente von S_n heißen **Permutationen** (einer n-elementigen Menge).

Schreibweisen :

- $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & .. & .. & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & .. & .. & \sigma(n) \end{bmatrix}$ für $\sigma \in S_n$

- $\mathrm{id} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & .. & .. & n \\ 1 & 2 & .. & .. & n \end{bmatrix}$ ... identische Abbildung

- $\tau \circ \sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & .. & .. & n \\ \tau(1) & \tau(2) & .. & .. & \tau(n) \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & .. & .. & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & .. & .. & \sigma(n) \end{bmatrix} =$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & .. & .. & n \\ \tau(\sigma(1)) & \tau(\sigma(2)) & .. & .. & \tau(\sigma(n)) \end{bmatrix}$ für $\sigma, \tau \in S_n$

Beispiel. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

Bemerkung. S_n hat $n!$ Elemente $(n! = 1 \cdot 2 \ ... \cdot n)$, und ist für $n \geq 3$ **nicht** abelsch (d.h. $\exists\ \sigma, \tau \in S_n$ mit $\tau \circ \sigma \neq \sigma \circ \tau$) .

Definition. $\tau \in S_n$ heißt **Transposition**, wenn τ lediglich zwei Elemente vertauscht und die übrigen Elemente fest läßt, d.h.

$\exists\ k, l \in \{1,2,...,n\}$ mit $\tau(k) = l$, $\tau(l) = k$ und $\tau(i) = i \ \ \forall\ i \neq k, l$

Beispiel. $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$ ist eine Transposition.

Bemerkung. $\tau \in S_n$ ist Transposition $\Rightarrow$ $\tau^{-1} = \tau$.

Lemma. Sei $\sigma \in S_n$. Dann kann σ als Produkt (d.h. Komposition) von Transpositionen geschrieben werden, d.h. $\exists$ Transpositionen $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k \in S_n$ sodass $\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 ... \circ \tau_k$.

Beweis. Ist $\sigma = \mathrm{id}$ und τ irgendeine Transposition, dann ist $\mathrm{id} = \tau \circ \tau^{-1} = \tau \circ \tau$.

Ist $\sigma \neq \mathrm{id}$, dann gibt es ein $i_1 \in \{1, 2, ..., n\}$ mit

$$\sigma(i) = i \quad \text{für } i = 1, ..., i_1 - 1 \quad \text{und} \quad \sigma(i_1) \neq i_1 \quad , \text{ sogar } \sigma(i_1) > i_1 \ .$$

Sei nun τ_1 jene Transposition, welche i_1 mit $\sigma(i_1)$ vertauscht, und sei $\sigma_1 = \tau_1 \circ \sigma$.

Dann ist $\sigma_1(i) = i$ für $i = 1, ..., i_1$.

Entweder ist nun $\sigma_1 = \mathrm{id}$, oder es gibt ein $i_2 > i_1$ mit

$$\sigma_1(i) = i \quad \text{für } i = 1, ..., i_2 - 1 \quad \text{und} \quad \sigma(i_2) > i_2 \ .$$

Analog wie vorher erhält man nun τ_2 und σ_2 , und schließlich ein $k \leq n$ sowie Transpositionen $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k$ mit $\sigma_k = \tau_k \circ ... \circ \tau_1 \circ \sigma = \mathrm{id}$.

Daraus folgt $\sigma = (\tau_k \circ ... \circ \tau_1)^{-1} = \tau_1^{-1} \circ ... \circ \tau_k^{-1} = \tau_1 \circ \tau_2 ... \circ \tau_k$. $\square$

Bemerkung.
Die Darstellung von $\sigma \in S_n$ als Produkt von Transpositionen ist **nicht** eindeutig, weil für jede Transposition τ gilt, dass $\mathrm{id} = \tau \circ \tau$.

Bemerkung. Sei $n \geq 2$ und $\tau_0 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ 2 & 1 & 3 & ... & n \end{bmatrix}$ jene Transposition, die 1 und 2 vertauscht.

Dann gibt es zu jeder beliebigen Transpostion $\tau \in S_n$ ein $\sigma \in S_n$ mit

$\tau = \sigma \circ \tau_0 \circ \sigma^{-1}$.

Beweis. τ vertausche die Elemente k und l . Sei $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(1) = k$ und $\sigma(2) = l$, und sei $\tau' = \sigma \circ \tau_0 \circ \sigma^{-1}$.

Wegen $\sigma^{-1}(k) = 1$ und $\sigma^{-1}(l) = 2$ gilt

$$\tau'(k) = \sigma(\tau_0(1)) = \sigma(2) = l \quad \text{und} \quad \tau'(l) = \sigma(\tau_0(2)) = \sigma(1) = k \ .$$

Für $i \notin \{k, l\}$ ist $\sigma^{-1}(i) \notin \{1, 2\}$, also

$$\tau'(i) = \sigma(\tau_0(\sigma^{-1}(i))) = \sigma(\sigma^{-1}(i)) = i \text{ , und damit } \tau' = \tau \ . \quad \square$$

Definition. Sei $\sigma \in S_n$.

i) Ein Paar $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$ heißt **Fehlstand von** σ , wenn $i < j$ aber $\sigma(i) > \sigma(j)$.

ii) Das **Signum** (Vorzeichen) von σ ist $\operatorname{sign} \sigma = +1$, wenn σ eine gerade Anzahl von Fehlständen hat, und $\operatorname{sign} \sigma = -1$, wenn σ eine ungerade Anzahl von Fehlständen hat.

iii) σ heißt **gerade**, wenn $\operatorname{sign} \sigma = +1$, und **ungerade** , wenn $\operatorname{sign} \sigma = -1$.

Beispiel. $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in S_3$ hat zwei Fehlstände, nämlich

$1 < 3$, $\sigma(1) > \sigma(3)$ und $2 < 3$, $\sigma(2) > \sigma(3)$.

Beachte, dass id keinen Fehlstand hat, also $\operatorname{sign} \operatorname{id} = +1$.

Lemma. Für jedes $\sigma \in S_n$ gilt $\operatorname{sign} \sigma = \prod\limits_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$.

Beweis. Man beachte, dass Fehlstand bedeutet, dass $j - i > 0$ aber $\sigma(j) - \sigma(i) < 0$.

Weil σ bijektiv ist, stimmt die Folge der Differenzen $j - i$, $i < j$ bis auf die Reihenfolge überein mit der Folge $|\sigma(j) - \sigma(i)|$, $i < j$.

Damit erhalten wir $\prod_{i<j}(\sigma(j)-\sigma(i)) =$

$$\prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} (\sigma(j)-\sigma(i)) \cdot (-1)^m \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} |\sigma(j)-\sigma(i)| =$$

$= (-1)^m \prod_{i<j} |\sigma(j)-\sigma(i)| = (-1)^m \prod_{i<j} (j-i)$, wobei m die Anzahl der Fehlstände bezeichnet. Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Satz. Für alle $\sigma, \tau \in S_n$ gilt $\operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sign}\tau \cdot \operatorname{sign}\sigma$.

Speziell ist $\operatorname{sign}\sigma^{-1} = \operatorname{sign}\sigma$ (weil $+1 = \operatorname{sign}\mathrm{id} = \operatorname{sign}\sigma \cdot \operatorname{sign}\sigma^{-1}$)

Beweis.

$$\operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) = \prod_{i<j} \tfrac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{j-i} = \prod_{i<j} \tfrac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \cdot \prod_{i<j} \tfrac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} =$$

$$\prod_{i<j} \tfrac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \cdot \operatorname{sign}\sigma \ .$$

$$\prod_{i<j} \tfrac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} = \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \tfrac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \cdot \prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)>\sigma(j)}} \tfrac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} =$$

$$\prod_{\substack{i<j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \tfrac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} \cdot \prod_{\substack{i>j \\ \sigma(i)<\sigma(j)}} \tfrac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} =$$

$$\prod_{\sigma(i)<\sigma(j)} \tfrac{\tau(\sigma(j))-\tau(\sigma(i))}{\sigma(j)-\sigma(i)} = \prod_{i<j} \tfrac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i} = \operatorname{sign}\tau \ . \quad \square$$

Folgerung.

a) Sei $\tau \in S_n$ eine Transposition. Dann ist $\operatorname{sign}\tau = -1$.

b) Sei $\sigma \in S_n$ ein Produkt von Transpositionen, i.e. $\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_k$. Dann ist $\operatorname{sign}\sigma = (-1)^k$.

Beweis. b) folgt mit dem vorherigen Satz aus a) .

zu a) : Sei τ_0 jene Transposition, die 1 und 2 vertauscht. Dann $\exists\, \sigma \in S_n$ (siehe Bemerkung früher) mit $\tau = \sigma \circ \tau_0 \circ \sigma^{-1}$.

Somit ist $\operatorname{sign} \tau = \operatorname{sign} \sigma \cdot \operatorname{sign} \tau_0 \cdot \operatorname{sign} \sigma^{-1} = \operatorname{sign} \tau_0 = -1$, weil τ_0 nur einen Fehlstand hat. $\square$

Bemerkung. $A_n = \{\sigma \in S_n \ : \ \operatorname{sign} \sigma = +1\}$ bildet eine Gruppe (bzgl. der Komposition von Abbildungen), also eine Untergruppe von S_n , und heißt die **alternierende Gruppe** .

Für festes $\tau \in S_n$ sei $A_n\tau = \{\rho \in S_n \ : \ \exists\, \sigma \in A_n \text{ mit } \rho = \sigma \circ \tau\}$.

Es gilt : Ist $\operatorname{sign} \tau = -1$, dann ist $S_n = A_n \cup A_n\tau$ und $A_n \cap A_n\tau = \emptyset$.

Beweis.
Sei $\sigma \in S_n$. Falls $\operatorname{sign} \sigma = +1 \ \Rightarrow \ \sigma \in A_n$.

Falls $\operatorname{sign} \sigma = -1$, dann $\sigma = (\sigma \circ \tau^{-1}) \circ \tau$ und $\operatorname{sign} (\sigma \circ \tau^{-1}) = +1$, also $\sigma \circ \tau^{-1} \in A_n$ bzw. $\sigma \in A_n\tau$.

Klarerweise gilt : $\sigma \in A_n\tau \ \Rightarrow \ \operatorname{sign} \sigma = -1$, also $\sigma \notin A_n$ bzw. $A_n \cap A_n\tau = \emptyset$. $\square$