Determinanten - II

1. Berechnung von Determinanten

Wir erinnern, dass für $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ gilt :

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} \ .$$

• Falls $n = 1$, gibt es offenbar nur die identische Permutation, und für eine 1×1 Matrix $A = (a)$ gilt $\det A = a$.

• Falls $n = 2$ (und damit $|S_2| = 2! = 2$) , gibt es nur die beiden Permutationen $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Damit ist $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

• Falls $n = 3$, ist $|S_3| = 3! = 6$ und

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \ .$$

Die Determinante einer 3×3 Matrix kann komfortabel mit der sog. **Regel von Sarrus** bestimmt werden.

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Mit $\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$ ist

$\det A = 0 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 - (1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 1) = 3$

Bemerkung. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $|S_n| = n!$, und damit tritt bei der Bestimmung von $\det A$ die sehr hohe Anzahl von $n!$ Summanden auf. Schon aus diesem Grund ist es wünschenswert, weitere Möglichkeiten zur Berechnung von $\det A$ zur Verfügung zu haben.

Bemerkung. (siehe vorher) Wird $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ in eine Matrix B in Zeilenstufenform übergeführt, dann gilt

$$\det A = (-1)^k b_{11} b_{22} ... b_{nn} \quad (k \text{ ... Anzahl der Zeilenvertauschungen})$$

Satz. Für $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ gilt $\det({}^tA) = \det A$. Damit gelten für die Determinante auch analoge Aussagen bzgl. elementarer Spaltenumformungen (etwa Vorzeichenwechsel bei der Vertauschung von zwei Spalten).

Beweis.

Sei $\sigma \in S_n$ und $\tau = \sigma^{-1}$. Ein Summand $a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)}$ ist dann

$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} ... a_{n\sigma(n)} = a_{\tau(\sigma(1))\sigma(1)} a_{\tau(\sigma(2))\sigma(2)} ... a_{\tau(\sigma(n))\sigma(n)} = a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} ... a_{\tau(n)n}$

durch Umordnung der Faktoren.

Durchläuft σ S_n , dann ebenso $\tau = \sigma^{-1}$. Daraus folgt aber die Behauptung, weil

$$\det({}^tA) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sign}\tau \; a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2} ... a_{\tau(n)n} \; . \quad \square$$

2. Die komplementäre Matrix

Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$. Für **festes** i, j ersetze a_{ij} durch 1 und alle übrigen Elemente der i-ten Zeile und der j-ten Spalte durch 0 .

Die entstehende Matrix werde mit A_{ij} bezeichnet.

Die Matrix A'_{ij} sei jene $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, welche aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte entsteht.

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist etwa

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A'_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A'_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun A_{ij} .

Durch $i-1$ Zeilenvertauschungen kann die i-te Zeile an die oberste Stelle gebracht werden.

Durch $j-1$ Spaltenvertauschungen kann die j-te Spalte ganz nach links gebracht werden.

Dadurch kann A_{ij} auf die "Blockform" $\begin{pmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & & & \\ .. & & A'_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ umgeformt werden.

Mit einem früheren Ergebnis ist damit

$$\det A_{ij} = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \det A'_{ij} = (-1)^{i+j} \det A'_{ij} \ .$$

Bemerkung. Seien $a^1, a^2, ..., a^n$ die Spalten von A , und sei

$$e^i = \begin{pmatrix} 0 \\ .. \\ 1 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix} \quad i - te\ Stelle \quad . \text{ Dann gilt}$$

$$\det A_{ij} = \det(a^1, .., a^{j-1}, e^i, a^{j+1}, .., a^n) \ .$$

Beweis. Addition von Vielfachen der j-ten Spalte zu den anderen Spalten liefert A_{ij} . □

Beispiel. A wie vorher (und $i = 3$, $j = 2$) . Dann ist

$$(a^1, e^3, a^3, a^4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Definition. Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ und setze $c_{ij} = \det A_{ij}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$.

Dann heißt $\widetilde{A} = {}^t(c_{ij})$ die zu A **komplementäre Matrix** .

Satz. Für $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ gilt $\widetilde{A} \cdot A = A \cdot \widetilde{A} = (\det A) \cdot E_n$.

Beweis. Das Element in der i-ten Zeile und k-ten Spalte von $\widetilde{A} \cdot A$ ist

$$\begin{pmatrix} c_{1i} & c_{2i} & .. & .. & c_{ni} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ .. \\ .. \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{jk} \det A_{ji} =$$

$$= \sum_{j=1}^n a_{jk} \det\left(a^1, .., a^{i-1}, e^j, a^{i+1}, .., a^n\right) =$$

$$= \det\left(a^1, .., a^{i-1}, \sum_{j=1}^n a_{jk} e^j, a^{i+1}, .., a^n\right) = \det\left(a^1, .., a^{i-1}, a^k, a^{i+1}, .., a^n\right) =$$

$= \delta_{ik} \det A$.

Somit ist $\widetilde{A} \cdot A = (\det A) \cdot E_n$.

Analog wird $A \cdot \widetilde{A} = (\det A) \cdot E_n$ gezeigt. $\square$

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\widetilde{A} = {}^t\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= {}^t\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} .$$

Man rechnet leicht nach, dass $\widetilde{A} \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Also ist $\det A = 3$.

3. Der Entwicklungssatz von Laplace

Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$ mit $n \geq 2$. Dann gilt

- (**Entwicklung nach der *i*-ten Zeile**)

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij} \qquad \text{für jedes } 1 \leq i \leq n$$

- (**Entwicklung nach der j-ten Spalte**)

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij} \quad \text{für jedes } \ 1 \leq j \leq n$$

Beweis. Wähle einen Zeilenindex $i \in \{1, 2, ..., n\}$. Dann ist

$$A \cdot \widetilde{A} = \begin{pmatrix} \det A & & & 0 \\ & .. & & \\ & & \det A & \\ & & & .. & \\ 0 & & & & \det A \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \widetilde{A} = {}^t(c_{ij}) \quad \text{mit}$$

$$c_{ij} = \det A_{ij} = (-1)^{i+j} \det A'_{ij} \ .$$

$\det A$ ist also das Produkt der i-ten Zeile von A mit der i-ten Spalte von $\widetilde{A}$ (dies ist aber die i-te Zeile der Matrix (c_{ij})) . Somit

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A'_{ij} \ .$$

Analog wird mittels $\widetilde{A} \cdot A = \det A \cdot E_n$ die Entwicklung nach der j-ten Spalte gezeigt. $\square$

Bemerkung. Der Faktor $(-1)^{i+j}$ bewirkt einen "Vorzeichenwechsel".

$$\begin{pmatrix} + & - & .. & .. \\ - & + & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \\ .. & .. & .. & .. \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Günstig ist die Entwicklung nach einer Zeile bzw. Spalte, die viele Nullen enthält.

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Entwicklung nach der 1. Zeile ergibt

$$\det A = 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1) + 2 \cdot 1 = 3 \ .$$

4. Inverse Matrix und Determinanten

Sei $A \in M(n \times n; \mathbb{K}$ invertierbar, i.e. $\det A \neq 0$.

Wegen $\left(\frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}\right) \cdot A = E_n$ gilt $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}$.

Speziell für $n = 2$ ergibt sich mit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\det A = ad - bc$, dass

$\widetilde{A} = {}^t\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ und somit

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

5. Cramersche Regel

Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit $A \in M(n \times n; \mathbb{K})$.

Ist A **invertierbar** (i.e. $\mathrm{Rg}A = n$) , dann ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und $x = A^{-1}b$.

Weil $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A}$, ist das ij-te Element von A^{-1} gleich $\frac{1}{\det A} c_{ji}$ mit $c_{ji} = \det A_{ji} = \det(a^1, .., a^{i-1}, e^j, a^{i+1}, .., a^n)$.

Damit ist die i-te Komponente von $x = A^{-1}b$ gleich

$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\det(a^1,..,a^{i-1},e^j,a^{i+1},..,a^n)}{\det A}$ und wegen der "Linearität in jeder Spalte" ist

$x_i = \frac{\det(a^1,..,a^{i-1},b,a^{i+1},..,a^n)}{\det A}$.

Diese Berechnungsmöglichkeit der (eindeutig bestimmten) Lösung x wird **Cramersche Regel** genannt.

Beispiel. Gegeben sei

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Damit ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$,

damit ist A invertierbar und die Cramersche Regel anwendbar. Somit

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = -1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\det A} = 2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\det A} = -1$$