Polynome - Zusammenfassung

Definition. Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

Ein **Polynom mit Koeffizienten aus** $\mathbb{K}$ ist ein formaler Ausdruck

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n \quad .$$

$a_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, 1, ..., n$ (**Koeffizienten**)

t heißt **Unbestimmte** (i.a. $t \in R^*$, wobei R^* ein kommutativen Ring ist, z.B. $\mathbb{R}$)

Schreibweise: $P \in \mathbb{K}[t]$.

$\deg P = \max\{k \in \mathbb{N} \ : \ a_k \neq 0\}$ heißt der **Grad von** P .

Man setzt $\deg P = -\infty$, wenn $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$, i.e. wenn P das **Nullpolynom** ist.

P heißt **normiert**, wenn $a_n = 1$.

Bemerkungen.

1) (Addition von Polynomen)

$P = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n$, $Q = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_m t^m$

oBdA sei $m \leq n$. Setze $b_{m+1} = ... = b_n = 0$ und definiere

$$P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + ... + (a_n + b_n)t^n$$

als **Summe von** P **und** Q .

Offenbar ist $\deg(P + Q) \leq \max\{\deg P, \deg Q\}$.

2) (Multiplikation mit Skalaren)

$P = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n$, $\lambda \in \mathbb{K}$ $\Rightarrow$

$\lambda \cdot P = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)t + ... + (\lambda a_n)t^n$

3) Somit ist $\mathbb{K}[t]$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Nullvektor in diesem Vektor-

raum ist das Nullpolynom.

4) (Polynomabbildungen)

Jedem Polynom $P = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n \in \mathbb{K}[t]$ kann eine Abbildung $\widetilde{P} : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, wobei $\widetilde{P}(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + ... + a_n\lambda^n$ ist, zugeordnet werden.

Damit erhalten wir eine Abbildung $\mathbb{K}[t] \to Abb(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, $P \mapsto \widetilde{P}$, welche linear ist.

$f \in Abb(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ heißt **Polynomabbildung**, wenn $\exists\ P \in \mathbb{K}[t]$ sodass $f = \widetilde{P}$.

$\widetilde{P}$ heißt die zu P gehörige Polynomabbildung.

Beispiel. Sei $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ mit den bekannten Operationen.

Betrachte $P = t + t^2$. Dann ist $\widetilde{P}(\lambda) = \lambda + \lambda^2$, und $\widetilde{P}(0) = 0 + 0 = 0$ und $\widetilde{P}(1) = 1 + 1 = 0$.

$\widetilde{P}$ ist also die Nullabbildung, obwohl $P \neq 0$. Dies bedeutet, dass die Zuordnung $P \mapsto \widetilde{P}$ i.a. **nicht** injektiv ist.

5) (Multiplikation und Division mit Rest)

Seien $P = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n$, $Q = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + ... + b_m t^m$.

Das **Produkt** von P und Q ist

$$P \cdot Q = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)t^2 + ... + a_n b_m t^{n+m} =$$

$$= c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + ... + c_{n+m} t^{n+m} \quad \text{wobei}$$

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i+j=k} a_i b_j \ .$$

Folgende Rechenregeln sind leicht nachzuweisen :

(i) $P \cdot (Q \cdot R) = (P \cdot Q) \cdot R$

(ii) $P \cdot Q = Q \cdot P$

(iii) $P \cdot (Q + R) = P \cdot Q + P \cdot R$, $(P + Q) \cdot R = P \cdot R + Q \cdot R$

(iv) $\deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q$

(v) $\widetilde{P \cdot Q}(\lambda) = \widetilde{P}(\lambda) \cdot \widetilde{Q}(\lambda)$

Satz. ("Polynomdivision")

Sind $P, Q \in \mathbb{K}[t]$, dann existieren eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in \mathbb{K}[t]$ mit

$$P = Q \cdot q + r \quad \text{und} \quad \deg r < \deg Q \ .$$

(Suggestiv, aber nicht ganz korrekt $\frac{P}{Q} = q + \frac{r}{Q}$)

Die praktische Durchführung der "Division mit Rest" erfolgt nach dem bekannten Algorithmus.

Nullstellen von Polynomen.

Sei $P = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... + a_n t^n \in \mathbb{K}[t]$.

$\lambda \in \mathbb{K}$ heißt **Nullstelle** (oder Wurzel) von P, wenn $\widetilde{P}(\lambda) = 0$, also wenn $a_0 + a_1\lambda + ... + a_n\lambda^n = 0$.

Man kann zeigen : Ist $\lambda \in \mathbb{K}$ eine Nullstelle von $P \in \mathbb{K}[t]$, dann $\overset{1}{\exists}\ Q \in \mathbb{K}[t]$ mit $\widetilde{P}(t) = (t - \lambda) \cdot \widetilde{Q}(t)$ und $\deg Q = \deg P - 1$.

Im besonderen folgt dann daraus, dass für $P \neq 0$ die Anzahl der Nullstellen von $P \leq \deg P$, also **endlich** ist.

Dies impliziert in weiterer Folge, dass die Zuordnung $P \mapsto \widetilde{P}$ **injektiv** ist, falls $\mathbb{K}$ unendlich viele Elemente hat. Man braucht in diesem Fall nicht mehr zwischen P und $\widetilde{P}$ zu unterscheiden.

Definition. Sei $P \in \mathbb{K}[t]$, $P \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Zahl

$\mu(P; \lambda) = \max\{r \in \mathbb{N} \ : \ \widetilde{P}(t) = (t - \lambda)^r \cdot \widetilde{Q}(t)$ mit $Q \in \mathbb{K}[t]$, $\deg Q < \deg P\}$

heißt die **Vielfachheit** der Nullstelle λ .

Offenbar gilt $\mu(P;\lambda) = 0 \Leftrightarrow \widetilde{P}(\lambda) \neq 0$ und wenn $\widetilde{P}(t) = (t-\lambda)^r \cdot \widetilde{Q}(t)$ mit $r = \mu(P;\lambda)$, dann ist $\widetilde{Q}(\lambda) \neq 0$.

$\mu(P;\lambda)$ gibt an, wie oft der "Linearfaktor" $(t-\lambda)$ in $\widetilde{P}(t)$ enthalten ist.

Beispiel. Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und

$P(t) = t^5 - 4t^3 + 2t^2 + 3t - 2 = (t-1)^3(t^2+3t+2) = (t-1)^3 Q(t)$

$\mu(P;1) = 3$, weil $Q(1) \neq 0$.

$Q(t) = (t+1)(t+2) \Rightarrow \mu(P;-1) = 1$, $\mu(P;-2) = 1$.

Speziell für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ gilt :

$\mu(P;\lambda) = \max\{r \in \mathbb{N} : P(\lambda) = P'(\lambda) = ... = P^{(r-1)}(\lambda) = 0\}$.

Wir wissen von vorher, dass für $P \neq 0$ die Anzahl der Nullstellen $\leq \deg P$, also endlich ist. Auf der anderen Seite gibt es Polynome, die **keine** Nullstellen besitzen.

Beispiel.

1) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $P(t) = t^2 + 1$. $P(t)$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$.

2) Sei $\mathbb{K} = \{0, 1, a_3, ..., a_m\}$ ein endlicher Körper.
Setze $\widetilde{P}(t) = t(t-1)(t-a_3)...(t-a_m)+1$. Dann hat $\widetilde{P}(t)$ keine Nullstellen in $\mathbb{K}$.

Im günstigsten Fall kann man erwarten, dass ein Polynom $P \in \mathbb{K}[t]$ in "Linearfaktoren zerfällt", d.h.

$\exists\ a, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$ mit $\widetilde{P}(t) = a(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)...(t-\lambda_n)$. d.h.

Zusammenfassung gleicher Nullstellen liefert die Form

$\widetilde{P}(t) = a(t-\lambda_{i_1})^{r_1}...(t-\lambda_{i_k})^{r_k}$

wobei $\lambda_{i_1}, ..., \lambda_{i_k}$ paarweise verschieden sind, $r_1 = \mu(P;\lambda_{i_1}), ..., r_k = \mu(P;\lambda_{i_k})$ und $n = r_1 + ... + r_k$ ist.

Fundamentalsatz der Algebra. Jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg P > 0$ hat mindestens eine Nullstelle, und damit hat jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg P = n > 0$ genau n Nullstellen.

Damit zerfällt jedes Polynom $P \in \mathbb{C}[t]$ in Linearfaktoren, d.h.

$\exists\ a, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $n = \deg P$ und $P(t) = a(t - \lambda_1)...(t - \lambda_n)$.

Beispiel.

(i) $P(t) = t^2 + 1 = (t + i)(t - i)$

(ii) $P(t) = t^4 - 1 = (t^2 + 1)(t^2 - 1) = (t - 1)(t + 1)(t + i)(t - i)$

Bemerkung. Ist $P \in \mathbb{C}[t]$ ein Polynom mit **reellen** Koeffizienten und $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle, dann ist auch $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle und es gilt $\mu(P; \lambda) = \mu(P; \overline{\lambda})$.

Satz. Sei $P \in \mathbb{R}[t]$ und $\deg P > 1$. Dann gibt es eine Zerlegung

$P(t) = a(t - \lambda_1)...(t - \lambda_r) \cdot Q_1 \cdot ... \cdot Q_m$

wobei $a, \lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ist . $Q_1, ..., Q_m \in \mathbb{R}[t]$ sind normierte Polynome mit $\deg P_i = 2$ und es gilt $r + 2m = n$.

Beispiel. $P(t) = t^4 - 1 = (t^2 - 1)(t^2 + 1) = (t - 1)(t + 1)(t^2 + 1)$

Folgerung. Jedes Polynom $P \in \mathbb{R}[t]$ von **ungeradem** Grad hat mindestens eine **reelle** Nullstelle (weil r ungerade sein muß).