Endomorphismen und darstellende Matrizen

Bekannt von vorher: Seien V und W $\mathbb{K}$-Vektorräume mit $\dim V = n$, $\dim W = m$ und sei $F : V \to W$ linear.

Werden Basen $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ in V bzw. W gewählt, dann hat F eine darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ bzgl. dieser Basen.

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ ist eine $m \times n$ Matrix. Die j-te Spalte von $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ ist der Koordinatenvektor von $F(a_j)$ bzgl. $\mathcal{B}$, falls $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Ist $\mathrm{Rg} F = r$, dann existieren Basen $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ in V bzw. W mit

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Dies ist die "einfachste" Form, die eine darstellende Matrix haben kann.

Beispiel. Wir betrachten den **Endomorphismus** $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$.

Wählen wir in beiden Vektorräumen die kanonische Basis $\mathcal{K}$, erhalten wir $M_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Wählen wir $\mathcal{A} = ((1,0),(0,1))$ und $\mathcal{B} = ((1,1),(1,-1))$, dann ist $F(a_1) = b_1$ und $F(a_2) = b_2$ und damit $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$.

Was geschieht nun, wenn wir **nur eine** Basis verwenden ? Gibt es eine Basis $\mathcal{A}$, sodass $M_{\mathcal{A}}(F) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Wir nehmen an, es gäbe eine solche Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$. Dann wäre $F(v_1) = v_1$. Mit $v_1 = (x_1, x_2)$ würde sich ergeben, dass

$(x_1 + x_2, x_1 - x_2) = (x_1, x_2)$ bzw. $x_1 + x_2 = x_1$, $x_1 - x_2 = x_2$.

Dies impliziert aber, dass $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ein Widerspruch.

Dies bedeutet, dass es **keine** Basis $\mathcal{A}$ gibt mit

$M_{\mathcal{A}}(F) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (Beachte auch, dass $\mathrm{Rg}F = 2$)

Wir stellen nun eine modifizierte Frage, nämlich ob es eine Basis $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ gibt mit $M_{\mathcal{A}}(F) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, wo also $M_{\mathcal{A}}(F) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$ eine **Diagonalmatrix** ist.

In diesem Fall suchen wir also Vektoren v_1, v_2 mit

$$F(v_1) = \lambda_1 v_1 \; , F(v_2) = \lambda_2 v_2$$

also Vektoren v mit der Eigenschaft $F(v) = \lambda v$.

Wir treffen den Ansatz $v = (x_1, x_2)$ und

$F(v) = F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2) = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

Dies führt zu einem homogenen Gleichungssystem

$$\begin{array}{c} x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ x_1 - x_2 = \lambda x_2 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{c} (1-\lambda)x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + (-1-\lambda)x_2 = 0 \end{array} .$$

Dieses homogene Gleichungssystem ist genau dann **nichttrivial** lösbar, wenn

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2 = 0 \text{ ist, also wenn } \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2} .$$

Für $\lambda_1 = +\sqrt{2}$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Für $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Die beiden Vektoren v_1, v_2 sind linear unabhängig und bilden damit eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^2$.

Es gilt $F(v_1) = \sqrt{2}v_1$, $F(v_2) = -\sqrt{2}v_2$, $M_{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

In diesem Fall gibt es also eine Basis $\mathcal{A}$, sodass die darstellende Matrix von F bzgl. $\mathcal{A}$ eine Diagonalmatrix ist.

(Ende des Beispiels)

Die Diskussion des Beispiels führt zur **allgemeinen Fragestellung** :

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n$ und $F : V \to V$ ein Endomorphismus .

Wie muß eine Basis $\mathcal{B}$ gewählt werden, damit $M_{\mathcal{B}}(F) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ "möglichst einfach" wird ?

Die Transformationsformel für darstellende Matrizen besagt, dass zwei darstellende Matrizen A, B einer linearen Abbildung $F : V \to W$ mittels $B = SAT^{-1}$ zusammenhängen (wobei T und S (invertierbare) Transformationsmatrizen sind) . Dies führte auch zum Begriff der "äquivalenten Matrizen".

Im jetzigen Fall mit $F : V \to V$ und Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ergibt sich damit für $A = M_{\mathcal{A}}(F) = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(F)$ und $B = M_{\mathcal{B}}(F) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$, dass

$$B = SAS^{-1} .$$

Definition. Zwei Matrizen $A, B \in M(n \times n; \mathbb{K})$ heißen **ähnlich**, wenn es reguläre $n \times n$ Matrix S gibt mit $B = S^{-1}AS$ gibt (bzw. gleichwertig $B = SAS^{-1}$) .

Bemerkungen.

(i) Die Ähnlichkeit von $n \times n$ Matrizen ist eine Äquivalenzrelation (Beweis analog wie im Falle äquivalenter Matrizen).

(ii) Für $F : V \to V$ und Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind $A = M_{\mathcal{A}}(F)$ und $B = M_{\mathcal{B}}(F)$ ähnlich.

Beispiel. (von vorher) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2)$.

$\mathcal{A} = ((1,0),(0,1))$ liefert $A = M_{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

$\mathcal{B} = ((1, -1+\sqrt{2}), (1, -1-\sqrt{2}))$ liefert $B = M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Rechnung liefert

$$S = \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ -1+\sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \ , \ S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1+\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

und $B = SAS^{-1}$.

Wir beobachten weiters, dass die Spalten von S^{-1} durch die Vektoren v_1, v_2 gebildet werden !