Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit, charakteristisches Polynom

Eine Fragestellung, die uns im weiteren beschäftigen wird, ist das Finden eines möglichst einfachen Repräsentanten aus jeder Äquivalenzklasse ähnlicher Matrizen.

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $F : V \to V$ linear.

(i) $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt **Eigenwert (EW) von** F , wenn

$\exists\ v \in V$, $v \neq 0$ mit $F(v) = \lambda v$.

(ii) Jeder Vektor $v \neq 0$ mit $F(v) = \lambda v$ heißt **Eigenvektor (EV) von** F zum Eigenwert λ .

Bemerkung. Sei $\dim V = n < \infty$ und $F : V \to V$ linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent :

(1) $\exists$ Basis von V, welche aus Eigenvektoren von F besteht,

(2) $\exists$ Basis $\mathcal{B}$ von V, sodass $M_{\mathcal{B}}(F)$ eine Diagonalmatrix der Form

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{ist.}$$

Beweis. Ist $\mathcal{B} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ eine Basis von V, dann sind die Spalten von $M_{\mathcal{B}}(F)$ die Koordinatenvektoren von $F(v_1), F(v_2), ..., F(v_n)$ bzgl. $\mathcal{B}$.

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad F(v_i) = \lambda_i v_i \ \ \forall\ i \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad v_i$ ist EV von $F \ \ \forall\ i$. $\quad \square$

Definition.

(i) $F : V \to V$ heißt **diagonalisierbar**, wenn eine der beiden vorigen Bedingungen erfüllt ist.

(ii) Eine $n \times n$ Matrix A heißt **diagonalisierbar**, wenn der zugehörige Endomorphismus $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $L_A(v) = Av$ diagonalisierbar ist ($\Leftrightarrow$ A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix) .

Bemerkung. Nicht jede Matrix (und damit nicht jeder Endomorphismus) ist diagonalisierbar.

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $L_A = F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x_1, x_2) = (x_1, 5x_1 + x_2)$.

Sei nun $0 \neq v = (x_1, x_2)$ ein EV von F . Dann $\exists\ \lambda$ mit $F(v) = \lambda v$.

Also ist $(x_1, 5x_1 + x_2) = \lambda(x_1, x_2)$ bzw. $x_1 = \lambda x_1$, $5x_1 + x_2 = \lambda x_2$ bzw.

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)x_1 = 0 \\ &5x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0 \ . \end{aligned}$$

Dieses homogene Gleichungssystem ist nichttrivial lösbar $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{, woraus folgt, dass } \lambda = 1 \ .$$

Mit $\lambda = 1$ erhalten wir die Gleichungen $x_1 = x_1$ und $5x_1 + x_2 = x_2$, womit $x_1 = 0$ und $x_2 = t$ beliebig ist.

Damit ist $v = t \cdot (0, 1)$, $t \in \mathbb{R}$ und es kann **keine** Basis von $\mathbb{R}^2$ geben, welche aus Eigenvektoren von $F = L_A$ besteht.

Man beachte, dass $\lambda = 1$ der einzige EW ist.

Eine **hinreichende** Bedingung für die Diagonalisierbarkeit ist durch folgende Aussage gegeben :

Ist $\dim V = n < \infty$, $F : V \to V$ linear und $\exists$ **paarweise verschiedene** EW $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, dann ist F diagonalisierbar.

Diese Aussage folgt aus dem folgenden

Lemma. Sei $F : V \to V$ linear und seien $v_1, ..., v_m$ EV zu paarweise verschiedenen EW .

Dann sind die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_m$ linear unabhängig.

Beweis. (mittels vollständiger Induktion über m)

Der Fall $m = 1$ ist klar, weil $v_1 \neq 0$. Sei die Aussage gültig für $m - 1$ Vektoren (Induktionsvoraussetzung).

Seien nun $v_1, ..., v_m$ EV zu paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, ..., \lambda_m$.

Betrachte $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = 0$ mit $\alpha_i \in \mathbb{K}$. Dann ist

$$0 = \lambda_m \alpha_1 v_1 + ... + \lambda_m \alpha_m v_m \quad \text{und}$$

$$0 = F(0) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + ... + \alpha_m \lambda_m v_m \ .$$

Subtraktion der beiden Gleichungen ergibt

$$0 = \alpha_1(\lambda_m - \lambda_1)v_1 + ... + \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1})v_{m-1} \ .$$

Laut Ind.vor. ist dann $\alpha_1(\lambda_m - \lambda_1) = 0, ..., \alpha_{m-1}(\lambda_m - \lambda_{m-1}) = 0$, und weil die λ_i paarweise verschieden sind, ist $\alpha_1 = ... = \alpha_{m-1} = 0$.

Damit erhalten wir $\lambda_m v_m = 0$ und weil $v_m \neq 0$, ist $\alpha_m = 0$.

Also sind $v_1, ..., v_m$ linear unabhängig. $\square$

Definition. Sei $F : V \to V$ linear und $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dann heißt $\text{Eig}(F; \lambda) = \{v \in V \ : \ F(v) = \lambda v\}$ der **Eigenraum** von F bzgl. λ .

Bemerkungen.

1) Weil $F(v) = \lambda v \ \Leftrightarrow \ (F - \lambda id_V)(v) = 0 \ \Leftrightarrow \ v \in \text{Ker}(F - \lambda id_V)$, ist $\text{Eig}(F; \lambda)$ ein Untervektorraum von V , und $\text{Eig}(F; \lambda) \setminus \{0\}$ ist die Menge der zu λ gehörigen EV von F .

2) λ ist EW von F $\Leftrightarrow$ $\text{Eig}(F; \lambda) \neq \{0\}$ $\Leftrightarrow$ $F - \lambda id_V$ **nicht** injektiv .

3) F ist nicht injektiv $\Leftrightarrow$ $\lambda = 0$ ist EW .

4) $\lambda_1 \neq \lambda_2 \ \Rightarrow \ \mathrm{Eig}(F;\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(F;\lambda_2) = \{0\}$.

$(v \in \mathrm{Eig}(F;\lambda_1) \cap \mathrm{Eig}(F;\lambda_2) \ \Rightarrow \ F(v) = \lambda_1 v \ , \ F(v) = \lambda_2 v \ \Rightarrow \ (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0 \ \Rightarrow \ v = 0)$

Sei nun $\dim V = n < \infty$, $F : V \to V$ linear und seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Basen von V .

Mit $A = M_{\mathcal{A}}(F)$ und $B = M_{\mathcal{B}}(F)$ gilt wegen früher $B = SAS^{-1}$ und damit $\det B = \det(SAS^{-1}) = \det S \det A \det S^{-1} = \det A$.

Damit können wir nun die **Determinante eines Endomorphismus** F auf eindeutige Weise durch

$$\det F = \det M_{\mathcal{A}}(F) \quad (\mathcal{A} \text{ irgendeine Basis von } V)$$

definieren.

Damit gilt : λ ist EW von $F \ \Leftrightarrow \ \det(F - \lambda id_V) = 0$.

(λ ist EW von $F \ \Leftrightarrow \ F - \lambda id_V$ ist nicht injektiv $\Leftrightarrow \ F - \lambda id_V$ ist nicht bijektiv $\Leftrightarrow \ \det(F - \lambda id_V) = 0$)

Ist darüberhinaus $\mathcal{A}$ eine Basis von V und $A = M_{\mathcal{A}}(F)$, dann gilt offenbar

$$M_{\mathcal{A}}(F - \lambda id_V) = A - \lambda E_n \ \text{ und } \ \det(F - \lambda id_V) = \det(A - \lambda E_n) \ .$$

Definition. Mit der Unbestimmten t heißt dann

$$P_F(t) = \det(A - tE_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix}$$

das **charakteristische Polynom** von F .

(Beachte, dass das charakteristische Polynom von F **nicht** von der Wahl der Basis $\mathcal{A}$ abhängt !)

Berechnen wir diese Determinante nach der Formel

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \; b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)}$$

und beachten, dass für $\sigma = id$ der Summand $(a_{11} - t)...(a_{nn} - t)$ auftritt, dann lässt sich $P_F(t)$ in der Form schreiben

$$P_F(t) = (a_{11} - t)...(a_{nn} - t) + Q(t)$$

und in jedem Summanden von $Q(t)$ können höchstens $n-2$ Diagonalkomponenten auftreten, also ist $Q(t)$ ein Polynom höchtens von einem Grad $\leq n-2$.

Schreiben wir weiter

$$(a_{11} - t)...(a_{nn} - t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + ... + a_{nn})t^{n-1} + Q_1(t)$$

dann ist $\deg Q_1 \leq n-2$ und

$$P_F(t) = \alpha_n t^n + \alpha_{n-1} t^{n-1} + ... + \alpha_1 t + \alpha_0 \quad \text{mit}$$

$$\alpha_n = (-1)^n$$

$$\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}(a_{11} + ... + a_{nn}) \quad (\; a_{11} + ... + a_{nn} \text{ heißt } \textbf{Spur} \text{ von } A)$$

$$\alpha_0 = \det A \; .$$

Definition. Sei A eine $n \times n$ Matrix. Dann heißt

$P_A(t) = \det(A - tE_n)$ das **charakteristische Polynom** von A .

(Dies ist natürlich das charakteristische Polynom von $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $L_A(x) = Ax$)

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$P_A(t) = \det(A - tE_n) = \begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 1-t \end{vmatrix} = (1-t)^2 - 4 = t^2 - 2t - 3 \; .$$

Aufgabe. Man zeige, dass für ähnliche Matrizen $A, B \in M(n \times n; \mathbb{K})$ gilt : $P_A(t) = P_B(t)$.

Wollen wir also die Eigenwerte eines Endomorphismus bestimmen, müssen wir die Nullstellen des zugehörigen charakteristischen Polynoms bestimmen.

Bemerkung 1. Ist $F : V \to V$ diagonalisierbar, dann zerfällt $P_F(t)$ in Linearfaktoren.

Beweis. Laut Annahme existiert eine Basis $\mathcal{A}$ mit

$$M_{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & \lambda_2 & .. & 0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & .. & \lambda_n \end{pmatrix} .$$

Damit ist $P_F(t) = (\lambda_1 - t)(\lambda_2 - t)...(\lambda_n - t)$. $\square$

Bemerkung 2. Sei die $n \times n$ Matrix A diagonalisierbar, i.e.

$F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ mit $F(v) = Av$ ist diagonalisierbar.

Dann ist bekannterweise die darstellende Matrix von F bzgl. der kanonischen Basis $\mathcal{A}$ gleich A .

Weiters gibt es eine Basis $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$, sodass $B = M_{\mathcal{B}}(F)$ eine Diagonalmatrix ist.

Wie früher erwähnt, gibt es dann eine invertierbare Matrix S mit $B = S^{-1}AS$, und die j-te Spalte von S ist der Koordinatenvektor von v_j bzgl. der kanonischen Basis $\mathcal{A}$.

Damit : Die Spalten von S sind die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_n$.

(Schreibt man $B = SAS^{-1}$ dann sind die Spalten von S^{-1} die Vektoren $v_1, v_2, ..., v_n$)

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Dann ist $\quad P_A(t) = \begin{vmatrix} -t & -1 & 1 \\ -3 & -2-t & 3 \\ -2 & -2 & 3-t \end{vmatrix} = \ldots = -(t-1)^2(t+1)$.

Damit sind $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = -1$ die Eigenwerte.

Nun zur Bestimmung der Eigenvektoren bzw. Eigenräume.

- Für $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ erhalten wir das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{, damit} \quad x_3 = x_1 + x_2 \quad \text{und}$$

als Lösungsvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Somit existieren zum (doppelten) Eigenwert $\lambda = 1$ zwei linear unabhängige Eigenvektoren $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, welche den zugehörigen Eigenraum $\mathrm{Eig}(A;1)$ aufspannen.

- Für $\lambda_3 = -1$ erhalten wir das homogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und weiters}$$

als Lösungsvektor $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Zum (einfach auftretenden) Eigenwert gibt es also einen linear unabhängigen Eigenvektor, etwa $(1,3,2)$, welcher den Eigenraum $\mathrm{Eig}(A;-1)$ aufspannt.

Die Vektoren $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(1,3,2)$ sind linear unabhängig, damit ist A diagonalisierbar und es gilt

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Beispiel. Gesucht sind die Eigenräume von $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$, wobei

$p(\tau) \mapsto (1+\tau)p'(\tau) - 3p(\tau)$.

Ist $\mathcal{A} = (1, \tau, \tau^2)$ die kanonische Basis von $\mathbb{P}_2$, dann ist

$F(1) = -3$, $F(\tau) = 1 - 2\tau$, $F(\tau^2) = 2\tau - \tau^2$, also

$$A = M_{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

EW von A : $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$.

Zu $\lambda_1 = -1$ erhalten wir den Eigenvektor $x_I = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$\mathrm{Eig}(F; -1) = \{p(\tau) \in \mathbb{P}_2 \ : \ p(\tau) = \nu(1 + 2\tau + \tau^2) \ , \ \nu \in \mathbb{R}\}$.

Zu $\lambda_2 = -2$ erhalten wir den Eigenvektor $x_{II} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\mathrm{Eig}(F; -2) = \{p(\tau) \in \mathbb{P}_2 \ : \ p(\tau) = \nu(1 + \tau) \ , \ \nu \in \mathbb{R}\}$.

Zu $\lambda_3 = -3$ erhalten wir den Eigenvektor $x_{III} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und

$\mathrm{Eig}(F; -3) = \{p(\tau) \in \mathbb{P}_2 \ : \ p(\tau) = \nu \ , \ \nu \in \mathbb{R}\}$.

Beispiel. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ beschreibt eine Drehung des $\mathbb{R}^2$.

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - t & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - t \end{vmatrix} = t^2 - 2t\cos\alpha + 1$$

Die Nullstellen von $P_A(t)$ sind damit durch $\lambda_{1,2} = \cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1}$ gegeben.

$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; \cos^2\alpha = 1 \;\Leftrightarrow\; \alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$.

Nur diese beiden Drehungen sind diagonalisierbar, - alle anderen Drehungen haben keine Eigenvektoren.

Beispiel. Sei $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$P_A(t) = t^2 - 1 = (t+1)(t-1)$.

Damit gibt es zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = -1$ und somit ist A diagonalisierbar.

Man rechnet leicht nach, dass

$$\mathrm{Eig}(A;1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \text{ und } \mathrm{Eig}(A;-1) = \mathbb{R}\begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha+\pi}{2} \\ \sin\frac{\alpha+\pi}{2} \end{pmatrix} .$$

Geometrische Interpretation : A beschreibt eine Spiegelung an der Geraden $\mathrm{Eig}(A;1) = \{v \in \mathbb{R}^2 \;:\; Av = v\}$.