

Trigonalisierung

Sei $F : V \rightarrow V$ linear und $\dim V = n$. Wir beschäftigen uns jetzt mit der Frage, ob es eine Basis \mathcal{B} von V gibt, sodass $M_{\mathcal{B}}(F)$ eine Dreiecksmatrix ist.

Definition.

1) Sei $F : V \rightarrow V$ linear, $\dim V = n$. Dann heißt F **trigonalisierbar**, wenn es eine Basis \mathcal{B} von V gibt sodass

$$A = M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{eine obere Dreiecksmatrix ist.}$$

2) Eine $n \times n$ Matrix A heißt **trigonalisierbar**, wenn $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$, $F(x) = Ax$, trigonalisierbar ist (d.h. A ist ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix).

Satz. (ohne Beweis) Sei $F : V \rightarrow V$ linear, $\dim V = n$.

F trigonalisierbar $\Leftrightarrow P_F(t)$ zerfällt über \mathbb{K} in Linearfaktoren

Folgerung. Sei V ein endlich-dimensionaler \mathbb{C} -Vektorraum und sei $F : V \rightarrow V$ linear.

Dann ist F trigonalisierbar.

(Nach dem Fundamentalsatz der Algebra zerfällt $P_F(t)$ über \mathbb{C} in Linearfaktoren)

Die getroffene Folgerung ist z.B. wichtig bei der Behandlung von Systemen linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Aus dem Beweis des obigen Satzes kann auch ein Algorithmus zur Trigonalisierung gewonnen werden.

Sei also $F : V \rightarrow V$ trigonalisierbar (d.h. $P_F(t)$ zerfällt in Linearfaktoren) und sei $\dim V = n$.

Führe den folgenden Schritt beginnend mit $k = 0$ aus und durchlaufe ihn $(n - 1)$ -mal.

- Gegeben sei eine Basis $\mathcal{B} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ sodass

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 0 & \ddots & & * \\ & & \lambda_k & \\ & & \dots & A_{n-k} \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}, \text{ wobei } \lambda_1, \dots, \lambda_k \text{ EW von } F \text{ sind.}$$

Beachte, dass für $k = 0$ gilt : $M_{\mathcal{B}}(F) = A_n$.

Bestimme nun einen EW λ_{k+1} von A_{n-k} und einen zugehörigen EV $\begin{pmatrix} \alpha_{k+1} \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ von A_{n-k} .

Setze $v = \alpha_{k+1}w_{k+1} + \dots + \alpha_n w_n$. Dann kann v gegen einen der Vektoren w_{k+1}, \dots, w_n ausgetauscht werden, z.B. w_j , sodass

$$\text{Span}(w_{k+1}, \dots, w_{j-1}, w_j, w_{j+1}, \dots, w_n) = \text{Span}(w_{k+1}, \dots, w_{j-1}, v, w_{j+1}, \dots, w_n)$$

Damit erhalten wir eine **neue Basis**

$$\mathcal{B}^* = (w_1, \dots, w_k, v, w_{k+1}, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_n)$$

mit der Eigenschaft $M_{\mathcal{B}^*}(F) = SM_{\mathcal{B}}(F)S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ 0 & \ddots & & * \\ & & \lambda_{k+1} & \\ & & \dots & A_{n-k-1} \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix}$

Die Spalten von S^{-1} sind die Koordinatenvektoren von \mathcal{B}^* bzgl. \mathcal{B} .

Beispiel. Sei $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wobei

$$F(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 4x_2 + 3x_3, -x_1 - x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3)$$

(Fall $k = 0$) Wir starten mit der kanonischen Basis $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Dann ist

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_F(t) = \begin{vmatrix} 3-t & 4 & 3 \\ -1 & -t & -1 \\ 1 & 2 & 3-t \end{vmatrix} = -(t-2)^3$$

D.h. $P_F(t)$ zerfällt über \mathbb{R} in Linearfaktoren, damit ist F trigonalisierbar.

$\mu(P_F; 2) = 3$ und $\dim \text{Eig}(F; 2) = 1 \Rightarrow F$ ist nicht diagonalisierbar.

$$\lambda_1 = 2 \text{ ist EW von } A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

und ein zugehöriger EV ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Hier ist nun $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wir erhalten nun eine neue Basis

$$\mathcal{B}^* = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ und es ist}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sowie } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Weiters ist } M_{\mathcal{B}^*}(F) = SM_{\mathcal{B}}(F)S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Im nächsten Schritt (Fall $k = 1$) nehmen wir für \mathcal{B} nun die soeben gewonnene Basis \mathcal{B}^* , i.e.

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \text{ und } M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A_2 ist dann $A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ mit dem charakteristischen Polynom $t^2 - 4t + 4$.

Daraus ergibt sich $\lambda = 2$ als doppelter Eigenwert von A_2 .

Als zugehörigen Eigenvektor erhalten wir $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\text{Dann ist } v = \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

v kann nun gegen einen der Vektoren w_2, w_3 ausgetauscht werden, z.B. gegen w_2 . Dann erhalten wir als neue Basis

$$\mathcal{B}^* = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Die Spalten vom jetzigen S^{-1} sind die Koordinatenvektoren der Basisvektoren vom jetzigen \mathcal{B}^* bzgl. des jetzigen \mathcal{B} .

$$\text{Weil aus } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ folgt, dass}$$

$\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = -1$, erhalten wir

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Nun ist } M_{\mathcal{B}^*}(F) = S M_{\mathcal{B}}(F) S^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit sind wir fertig, weil wir eine Basis \mathcal{B}^* gefunden haben, wo die

darstellende Matrix von F bezüglich dieser Basis eine obere Dreiecksmatrix ist.

Nun können wir uns die Frage stellen, ob es im Falle der Trigonalisierbarkeit "möglichst einfache" obere Dreiecksmatrizen als darstellende Matrizen gibt.

Definition. Eine $r \times r$ Matrix J heißt **Jordanmatrix zum EW** $\lambda \in \mathbb{K}$, wenn J die Form besitzt

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für $r = 1$ $J = (\lambda)$, für $r = 2$ $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ und

$$\text{für } r = 3 \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Satz. (Satz über die Jordansche Normalform)

Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit $\dim V = n < \infty$, und sei $F : V \rightarrow V$ linear.

Dann gilt : Zerfällt $P_F(t)$ über \mathbb{K} in Linearfaktoren, dann gibt es eine Basis \mathcal{B} von V , sodass

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} J_1 & & & 0 \\ 0 & J_2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & J_l \end{pmatrix}, \text{ wobei die } J_i \text{ Jordanmatrizen sind.}$$

Man sagt, $M_{\mathcal{B}}(F)$ hat **Jordansche Normalform**.

Bemerkungen.

- (i) Im allgemeinen ist die Anzahl der auftretenden Jordanmatrizen größer als die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte von F .
- (ii) Ist V ein \mathbb{C} -Vektorraum, dann lässt sich jeder Endomorphismus $F : V \rightarrow V$ durch eine Matrix in Jordanscher Normalform darstellen.

Zum Abschluß sei ein weiterer wichtiger Satz erwähnt.

Ist $P(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$ ein Polynom, und $F : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, dann kann man

$$P(F) = a_n F^n + \dots + a_1 F + a_0 \text{id}_V ,$$

wobei $F^k = F \circ \dots \circ F$ (k -mal) ist, betrachten.

Man beachte, dass $P(F)$ wieder ein Endomorphismus $F : V \rightarrow V$ ist.

Der folgende Satz sagt aus, was geschieht, wenn F in sein eigenes charakteristisches Polynom eingesetzt wird.

Satz. (Satz von **Cayley-Hamilton**)

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\dim V = n < \infty$.

Sei weiters $F : V \rightarrow V$ linear und $P_F(t)$ das charakteristische Polynom von F .

Dann gilt : $P_F(F) = 0$... (Nullabbildung)