

Fragenkatalog - VO

1. Was versteht man unter einem \mathbb{K} -Vektorraum ? Geben Sie Beispiele für wichtige \mathbb{K} -Vektorräume an.
2. Was ist ein Untervektorraum ? Was versteht man unter dem von einer Teilmenge erzeugten Untervektorraum ?
3. Erklären Sie den Begriff 'Linearkombination' . Wann nennt man eine endliche (bzw. eine beliebige) Familie von Vektoren linear unabhängig ?
4. Erklären Sie die Begriffe 'Erzeugendensystem' und 'Basis' . Geben Sie Beispiele für Vektorräume und deren Basen an. Auf welche Weisen kann der Begriff 'Basis' charakterisiert werden ?
5. Was besagt das Austauschlemma und der Austauschsatz von Steinitz ?
6. Was versteht man unter Zeilenraum, Zeilenrang, Spaltenraum und Spaltenrang einer $m \times n$ Matrix ?
7. Was sind elementare Zeilenumformungen einer Matrix und welche Auswirkungen haben sie auf den Zeilenrang (Spaltenrang) ?
8. Wann sagt man, eine Matrix liegt in Zeilenstufenform vor ?
9. Was versteht man unter der Summe $W + W'$ von zwei Unterräumen eines Vektorraums V ? Wie kann man die Dimension von $W + W'$ beschreiben ?
10. Wann spricht man von einer direkten Summe von Unterräumen ? Wie kann man die Direktheit einer Summe von Unterräumen charakterisieren ?
11. Was versteht man unter einer linearen Abbildung zwischen zwei Vektorräumen ? Geben Sie einige Beispiele und grundlegende Eigenschaften linearer Abbildungen an.
12. Was versteht man unter der Menge $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und welche Struktur hat diese Menge ? Was bedeuten die Begriffe 'Isomorphismus' und 'Endomorphismus' ?

13. Welche zwei wichtige Unterräume werden durch eine lineare Abbildung $F : V \rightarrow W$ geliefert ? Was lässt sich bzgl. der Dimensionen dieser Unterräume aussagen ? Was sind Defekt und Rang einer linearen Abbildung ?
14. Unter welcher Voraussetzung ist das Produkt von zwei Matrizen definiert und wie wird es berechnet ?
15. Was versteht man unter einem Koordinatensystem in einem Vektorraum ? Was ist ein Koordinatenvektor ? Geben Sie Beispiele für Vektorräume und zugehörige Koordinatensysteme an.
16. Seien V und W \mathbb{K} -Vektorräume mit $\dim V = n$ und $\dim W = m$. Weiters sei $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$ bzw. $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$ eine Basis von V bzw. W .
Auf welche Art und Weise kann einer $m \times n$ Matrix A eine lineare Abbildung $F : V \rightarrow W$ zugeordnet werden ? Welche Eigenschaften hat diese Zuordnung ?
Auf welche Art und Weise kann einer linearen Abbildung $F : V \rightarrow W$ eine $m \times n$ Matrix A zugeordnet werden ? Wie heißt diese Matrix und welche Eigenschaften hat diese Zuordnung ?
17. (siehe zuvor) Was bedeutet die Komposition linearer Abbildungen für die zugeordneten Matrizen ?
18. Wie ist der Rang einer Matrix definiert ?
19. Sei $F : V \rightarrow W$ linear und seien Basen für V und W gegeben. Wie kann man eine Basis für $\text{Im}F$ bestimmen ?
20. Was kann man über Injektivität, Surjektivität bzw. Bijektivität einer linearen Abbildung $F : V \rightarrow W$ aussagen, wenn $\dim V = \dim W < \infty$?
21. Wann nennt man eine (quadratische) Matrix invertierbar ? Was lässt sich über darstellende Matrizen im Falle eines Isomorphismus $F : V \rightarrow W$ aussagen ?
22. Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Bestimmung der inversen Matrix.
23. Was versteht man unter einer Koordinatentransformation ? Was ist die dabei auftretende Transformationsmatrix ?
24. Wie lautet die Transformationsformel für darstellende Matrizen ? Erläutern Sie das dabei auftretende Diagramm.

25. Wie lautet die 'einfachste' Form, die eine darstellende Matrix haben kann ?
26. Was versteht man unter äquivalenten Matrizen, und was für eine Relation zwischen Matrizen ist das ? Wie lässt sich die Äquivalenz von Matrizen noch beschreiben ?
27. Was sind Elementarmatrizen und ihre grundlegenden Eigenschaften ?
28. Was versteht man unter einem linearen Gleichungssystem und wie kann es in Matrixschreibweise dargestellt werden ?
29. Wie wird der Lösungsraum eines homogenen Gleichungssystems bestimmt ? Welche Aussage gilt für die Dimension des Lösungsraums ?
30. Was sind affine Unterräume und ihre elementaren Eigenschaften ?
31. Woraus setzt sich die allgemeine Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems zusammen ?
32. Wann ist ein inhomogenes Gleichungssystem $Ax = b$ überhaupt lösbar ? Wann sagt man, eine Matrix A liefert ein universell lösbares Gleichungssystem ? Wann ist $Ax = b$ eindeutig lösbar ?
33. Wie wird ein inhomogenes Gleichungssystem $Ax = b$ konkret gelöst ?
34. Der Begriff der 'Determinante' einer quadratischen Matrix wurde durch drei definierende Eigenschaften festgelegt. Welche Eigenschaften (bzw. Forderungen) waren das ?

Welche wichtigen weiteren Eigenschaften können aus den definierenden Eigenschaften dann hergeleitet werden ?
35. Wie lautet die explizite Formel für die Determinante einer $n \times n$ Matrix ?
36. Wie gelangt man zur sog. 'komplementären Matrix' und was ist die fundamentale Eigenschaft dieser Matrix ?
37. Was versteht man unter dem Entwicklungssatz von Laplace ?
38. Wie kann die inverse Matrix mittels Determinanten bestimmt werden ?
39. Was ist die Cramersche Regel und unter welchen Voraussetzungen ist sie anwendbar ?

40. Erläutern Sie die Situation, wenn bei einem Endomorphismus $F : \rightarrow V$ nur **eine** Basis für V verwendet wird. Was lässt sich über die auftretenden darstellenden Matrizen sagen ? Wie lautet in diesem Fall die Transformationsformel für darstellende Matrizen ?
41. Was sind ähnliche Matrizen ?
42. Was versteht man unter einem Eigenwert bzw. Eigenvektor eines Endomorphismus ? Was ist der Eigenraum ?
43. Wie ist die Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus definiert ? Was ist ein wichtiges hinreichendes Kriterium für die Diagonalisierbarkeit ?
44. Wie kommt man zum Begriff der Determinante eines Endomorphismus ?
45. Was versteht man unter dem charakteristischen Polynom eines Endomorphismus ? Was kann man über einige Koeffizienten des charakteristischen Polynoms aussagen ?
46. Welche Beziehung gilt allgemein zwischen der Vielfachheit eines Eigenwerts und der Dimension des zugehörigen Eigenraums ?
47. Auf welche Weise kann man die Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus charakterisieren ?
48. Wann heißt ein Endomorphismus trigonalisierbar, und wodurch ist die Trigonalisierbarkeit charakterisiert ? Was ergibt sich insbesondere für \mathbb{C} -Vektorräume ?
49. Was besagt der Satz über die Jordan'sche Normalform ?
50. Was besagt der Satz von Cayley-Hamilton ?