

## Fragenkatalog - VO

1. Was versteht man unter einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum ? Geben Sie Beispiele für wichtige  $\mathbb{K}$ -Vektorräume an.
2. Was ist ein Untervektorraum ? Was versteht man unter dem von einer Teilmenge erzeugten Untervektorraum ?
3. Erklären Sie den Begriff 'Linearkombination' . Wann nennt man eine endliche (bzw. eine beliebige) Familie von Vektoren linear unabhängig ?
4. Erklären Sie die Begriffe 'Erzeugendensystem' und 'Basis' . Geben Sie Beispiele für Vektorräume und deren Basen an. Auf welche Weisen kann der Begriff 'Basis' charakterisiert werden ?
5. Was besagt das Austauschlemma und der Austauschsatz von Steinitz ?
6. Was versteht man unter Zeilenraum, Zeilenrang, Spaltenraum und Spaltenrang einer  $m \times n$  Matrix ?
7. Was sind elementare Zeilenumformungen einer Matrix und welche Auswirkungen haben sie auf den Zeilenrang (Spaltenrang) ?
8. Wann sagt man, eine Matrix liegt in Zeilenstufenform vor ?
9. Was versteht man unter der Summe  $W + W'$  von zwei Unterräumen eines Vektorraums  $V$  ? Wie kann man die Dimension von  $W + W'$  beschreiben ?
10. Wann spricht man von einer direkten Summe von Unterräumen ? Wie kann man die Direktheit einer Summe von Unterräumen charakterisieren ?
11. Was versteht man unter einer linearen Abbildung zwischen zwei Vektorräumen ? Geben Sie einige Beispiele und grundlegende Eigenschaften linearer Abbildungen an.
12. Was versteht man unter der Menge  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  und welche Struktur hat diese Menge ? Was bedeuten die Begriffe 'Isomorphismus' und 'Endomorphismus' ?

13. Welche zwei wichtige Unterräume werden durch eine lineare Abbildung  $F : V \rightarrow W$  geliefert ? Was lässt sich bzgl. der Dimensionen dieser Unterräume aussagen ? Was sind Defekt und Rang einer linearen Abbildung ?
14. Unter welcher Voraussetzung ist das Produkt von zwei Matrizen definiert und wie wird es berechnet ?
15. Was versteht man unter einem Koordinatensystem in einem Vektorraum ? Was ist ein Koordinatenvektor ? Geben Sie Beispiele für Vektorräume und zugehörige Koordinatensysteme an.
16. Seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume mit  $\dim V = n$  und  $\dim W = m$ . Weiters sei  $\mathcal{A} = \{v_1, \dots, v_n\}$  bzw.  $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_m\}$  eine Basis von  $V$  bzw.  $W$ .  
Auf welche Art und Weise kann einer  $m \times n$  Matrix  $A$  eine lineare Abbildung  $F : V \rightarrow W$  zugeordnet werden ? Welche Eigenschaften hat diese Zuordnung ?  
Auf welche Art und Weise kann einer linearen Abbildung  $F : V \rightarrow W$  eine  $m \times n$  Matrix  $A$  zugeordnet werden ? Wie heißt diese Matrix und welche Eigenschaften hat diese Zuordnung ?
17. (siehe zuvor) Was bedeutet die Komposition linearer Abbildungen für die zugeordneten Matrizen ?
18. Wie ist der Rang einer Matrix definiert ?
19. Sei  $F : V \rightarrow W$  linear und seien Basen für  $V$  und  $W$  gegeben. Wie kann man eine Basis für  $\text{Im}F$  bestimmen ?
20. Was kann man über Injektivität, Surjektivität bzw. Bijektivität einer linearen Abbildung  $F : V \rightarrow W$  aussagen, wenn  $\dim V = \dim W < \infty$  ?
21. Wann nennt man eine (quadratische) Matrix invertierbar ? Was lässt sich über darstellende Matrizen im Falle eines Isomorphismus  $F : V \rightarrow W$  aussagen ?
22. Beschreiben Sie einen Algorithmus zur Bestimmung der inversen Matrix.
23. Was versteht man unter einer Koordinatentransformation ? Was ist die dabei auftretende Transformationsmatrix ?
24. Wie lautet die Transformationsformel für darstellende Matrizen ? Erläutern Sie das dabei auftretende Diagramm.

25. Wie lautet die 'einfachste' Form, die eine darstellende Matrix haben kann ?
26. Was versteht man unter äquivalenten Matrizen, und was für eine Relation zwischen Matrizen ist das ? Wie lässt sich die Äquivalenz von Matrizen noch beschreiben ?
27. Was sind Elementarmatrizen und ihre grundlegenden Eigenschaften ?
28. Was versteht man unter einem linearen Gleichungssystem und wie kann es in Matrixschreibweise dargestellt werden ?
29. Wie wird der Lösungsraum eines homogenen Gleichungssystems bestimmt ? Welche Aussage gilt für die Dimension des Lösungsraums ?
30. Was sind affine Unterräume und ihre elementaren Eigenschaften ?
31. Woraus setzt sich die allgemeine Lösung eines inhomogenen Gleichungssystems zusammen ?
32. Wann ist ein inhomogenes Gleichungssystem  $Ax = b$  überhaupt lösbar ? Wann sagt man, eine Matrix  $A$  liefert ein universell lösbares Gleichungssystem ? Wann ist  $Ax = b$  eindeutig lösbar ?
33. Wie wird ein inhomogenes Gleichungssystem  $Ax = b$  konkret gelöst ?
34. Der Begriff der 'Determinante' einer quadratischen Matrix wurde durch drei definierende Eigenschaften festgelegt. Welche Eigenschaften (bzw. Forderungen) waren das ?  
  
Welche wichtigen weiteren Eigenschaften können aus den definierenden Eigenschaften dann hergeleitet werden ?
35. Wie lautet die explizite Formel für die Determinante einer  $n \times n$  Matrix ?
36. Wie gelangt man zur sog. 'komplementären Matrix' und was ist die fundamentale Eigenschaft dieser Matrix ?
37. Was versteht man unter dem Entwicklungssatz von Laplace ?
38. Wie kann die inverse Matrix mittels Determinanten bestimmt werden ?
39. Was ist die Cramersche Regel und unter welchen Voraussetzungen ist sie anwendbar ?

40. Erläutern Sie die Situation, wenn bei einem Endomorphismus  $F : V \rightarrow V$  nur **eine** Basis für  $V$  verwendet wird. Was lässt sich über die auftretenden darstellenden Matrizen sagen ? Wie lautet in diesem Fall die Transformationsformel für darstellende Matrizen ?
41. Was sind ähnliche Matrizen ?
42. Was versteht man unter einem Eigenwert bzw. Eigenvektor eines Endomorphismus ? Was ist der Eigenraum ?
43. Wie ist die Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus definiert ? Was ist ein wichtiges hinreichendes Kriterium für die Diagonalisierbarkeit ?
44. Wie kommt man zum Begriff der Determinante eines Endomorphismus ?
45. Was versteht man unter dem charakteristischen Polynom eines Endomorphismus ? Was kann man über einige Koeffizienten des charakteristischen Polynoms aussagen ?
46. Welche Beziehung gilt allgemein zwischen der Vielfachheit eines Eigenwerts und der Dimension des zugehörigen Eigenraums ?
47. Auf welche Weise kann man die Diagonalisierbarkeit eines Endomorphismus charakterisieren ?
48. Wann heißt ein Endomorphismus trigonalisierbar, und wodurch ist die Trigonalisierbarkeit charakterisiert ? Was ergibt sich insbesondere für  $\mathbb{C}$ -Vektorräume ?
49. Was besagt der Satz über die Jordan'sche Normalform ?
50. Was besagt der Satz von Cayley-Hamilton ?