

Matrizen - I

Definition. Sei \mathbb{K} ein Körper. Ein rechteckiges Schema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \dots \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

wobei $a_{ij} \in \mathbb{K}$ heißt **Matrix** bzw. eine $m \times n$ Matrix (mit Elementen aus \mathbb{K}).

Die Elemente a_{ij} einer Matrix heißen auch **Komponenten** der Matrix.

Für jedes $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ heißt $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$

die **i -te Zeile** von A bzw. der **i -te Zeilenvektor** von A .

Für jedes $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ heißt

$$a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

die **j -te Spalte** von A bzw. der **j -te Spaltenvektor** von A .

Somit:

- Eine $m \times n$ Matrix A hat also m Zeilen und n Spalten.
- Jede Zeile a_i einer $m \times n$ Matrix A kann als Element von \mathbb{K}^n aufgefaßt werden.
- Jede Spalte a^j einer $m \times n$ Matrix A kann als Element von \mathbb{K}^m aufgefaßt werden.
- Das Element a_{ij} einer Matrix A ist jenes Element, welches in der i -ten Zeile und der j -ten Spalte von A steht.

Definition. Eine $m \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ heißt **quadratisch**, wenn $m = n$.

Die Elemente $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ bilden dann die sog. **Diagonalelemente** (bzw. **Hauptdiagonale**) von A .

Gilt darüberhinaus $a_{ij} = 0$ für $i > j$ (bzw. $i < j$), dann heißt die (quadratische) Matrix A eine **obere** (bzw. **untere**) **Dreiecksmatrix**.

A heißt **Diagonalmatrix**, wenn A quadratisch ist und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

Bemerkung. Sei $M(m \times n; \mathbb{K})$ die Menge aller $m \times n$ Matrizen mit Elementen aus \mathbb{K} .

Folgende Operationen machen $M(m \times n; \mathbb{K})$ zu einem \mathbb{K} -Vektorraum:

Für $A = (a_{ij})$ und $B = (b_{ij})$ setze

$$A + B = (c_{ij}) \quad \text{mit} \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\lambda A = (d_{ij}) \quad \text{mit} \quad d_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n$$

Beispiel. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $m = 3$, $n = 2$, $\lambda = -2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A + B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 9 & 8 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -6 & -8 \\ -10 & -12 \end{pmatrix}$$

Der Nullvektor in $M(m \times n; \mathbb{K})$ ist die **Nullmatrix** O (d.h. alle Matrixelemente sind 0). Die inverse Matrix von $A = (a_{ij})$ bzgl. der Addition ist die Matrix $-A = (-a_{ij})$.

Für jedes $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ sei E_{ij} jene Matrix, wo die ij -te Komponente 1 ist und alle verbleibenden Komponenten Null sind.

$$\begin{pmatrix} & * & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ & * & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ & * & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & * & & & \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \dots & \dots & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ & * & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ & * & & & \end{pmatrix}$$

IV. Vertauschen der i -ten Zeile mit der j -ten Zeile :

$$\begin{pmatrix} & * & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ & * & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ & * & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & * & & & \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & \dots & a_{jn} \\ & * & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & \dots & a_{in} \\ & * & & & \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Die Umformungen III. und IV. ergeben sich durch wiederholte Anwendungen der Umformungen I. und II. .

$$III. : \begin{pmatrix} * \\ a_i \\ * \\ a_j \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ a_i \\ * \\ \lambda a_j \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ a_i + \lambda a_j \\ * \\ \lambda a_j \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ a_i + \lambda a_j \\ * \\ a_j \\ * \end{pmatrix}$$

$$IV. : \begin{pmatrix} * \\ a_i \\ * \\ a_j \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ a_i \\ * \\ -a_j \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ a_i \\ * \\ a_i - a_j \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ a_i - (a_i - a_j) \\ * \\ a_i - a_j \\ * \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} * \\ a_j \\ * \\ a_i - a_j \\ * \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} * \\ a_j \\ * \\ a_i \\ * \end{pmatrix}$$

Bemerkung. Auf analoge Weise kann man damit natürlich auch sogenannte **elementare Spaltenumformungen** definieren.

Sei A eine $m \times n$ Matrix.

Durch die m Zeilen a_1, a_2, \dots, a_m erhalten wir m Vektoren des \mathbb{K}^n .

Durch die n Spalten a^1, a^2, \dots, a^n erhalten wir n Vektoren des \mathbb{K}^m .

Definition. Sei A eine $m \times n$ Matrix.

- 1) Der **Zeilenraum** von A ist $\text{ZR}(A) = \text{Span}(a_1, \dots, a_m) \triangleleft \mathbb{K}^n$.
- 2) Der **Spaltenraum** von A ist $\text{SR}(A) = \text{Span}(a^1, \dots, a^n) \triangleleft \mathbb{K}^m$.
- 3) (**Zeilenrang**, **Spaltenrang**)

$$\text{Zeilenrang}(A) = \dim_{\mathbb{K}} \text{ZR}(A) \quad (\text{ist stets } \leq \min\{m, n\})$$

$$\text{Spaltenrang}(A) = \dim_{\mathbb{K}} \text{SR}(A) \quad (\text{ist stets } \leq \min\{m, n\})$$

Lemma. Die Matrix B entstehe aus der Matrix A durch eine elementare Zeilenumformung vom Typ I oder Typ II.

Dann ist $\text{ZR}(A) = \text{ZR}(B)$.

Beweis.

(a) (Umformung vom Typ I)

A habe die Zeilenvektoren $a_1, \dots, a_i, \dots, a_m$

B habe die Zeilenvektoren $a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_m \quad (\lambda \neq 0)$

Ist nun $v \in \text{ZR}(A)$, dann gibt es $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ mit

$$v = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_i a_i + \dots + \mu_m a_m = \mu_1 a_1 + \dots + \frac{\mu_i}{\lambda} (\lambda a_i) + \dots + \mu_m a_m .$$

Also ist auch $v \in \text{ZR}(B)$ und damit gilt $\text{ZR}(A) \subseteq \text{ZR}(B)$.

Ist $v \in \text{ZR}(B)$, dann gibt es $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ mit

$$v = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_i (\lambda a_i) + \dots + \mu_m a_m = \mu_1 a_1 + \dots + (\mu_i \lambda) a_i + \dots + \mu_m a_m .$$

Also ist auch $v \in \text{ZR}(A)$ und damit gilt $\text{ZR}(B) \subseteq \text{ZR}(A)$, insgesamt also $\text{ZR}(A) = \text{ZR}(B)$.

(b) (Umformung vom Typ II)

A habe die Zeilenvektoren $a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_m$

B habe die Zeilenvektoren $a_1, \dots, a_i + a_j, \dots, a_j, \dots, a_m$

Ist nun $v \in \text{ZR}(A)$, dann gibt es $\mu_1, \dots, \mu_m \in \mathbb{K}$ mit

$$v = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_i a_i + \dots + \mu_j a_j + \dots + \mu_m a_m = \mu_1 a_1 + \dots + \mu_i (a_i + a_j) + \dots + (\mu_j - \mu_i) a_j + \dots + \mu_m a_m .$$

Also ist auch $v \in \text{ZR}(B)$ und damit gilt $\text{ZR}(A) \subseteq \text{ZR}(B)$. In gleicher Weise kann gezeigt werden, dass $\text{ZR}(B) \subseteq \text{ZR}(A)$ gilt, und damit ist $\text{ZR}(A) = \text{ZR}(B)$. \square

Folgerung. Die Matrix B entstehe aus der Matrix A durch endlich viele elementare Zeilenumformungen.

Dann gilt: $\text{ZR}(A) = \text{ZR}(B)$.

Man sagt, eine Matrix $B \in M(m \times n; \mathbb{K})$, $B \neq O$ liegt in **Zeilenstufenform** vor, wenn es Spaltenindizes $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ gibt, sodass $b_{1j_1} \neq 0$, $b_{2j_2} \neq 0$, \dots , $b_{kj_k} \neq 0$ und

$$\text{für } j < j_1 : b_{ij} = 0 \quad \forall i$$

$$\text{für } j_m \leq j < j_{m+1} : b_{ij} = 0 \quad \forall i > m$$

$$\text{für } j \geq j_k : b_{ij} = 0 \quad \forall i > k$$

Das heißt: durch die Elemente $b_{1j_1}, b_{2j_2}, \dots, b_{kj_k}$ wird eine "Stufenlinie" gebildet, sodass alle Elemente unterhalb der Stufenlinie $= 0$ sind.

(Veranschaulichung siehe Tafel.)

Behauptung. Sind dann b_1, b_2, \dots, b_k die ersten k Zeilenvektoren von B , dann bilden (b_1, b_2, \dots, b_k) eine Basis von $ZR(B)$, und im besonderen gilt damit $\text{Zeilenrang}(B) = k$.

Beweis. Weil $b_i = 0$ für $i > k$, ist zu zeigen, dass (b_1, b_2, \dots, b_k) linear unabhängig ist.

Sei also $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k = 0$.

Weil $b_1 = (0, \dots, b_{1j_1}, \dots, b_{1n})$, $b_2 = (0, \dots, b_{2j_2}, \dots, b_{2n})$ etc., ist die j_1 -te Komponente von $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_k b_k$ gleich $\lambda_1 b_{1j_1}$. Somit $\lambda_1 b_{1j_1} = 0$ und weil $b_{1j_1} \neq 0$, ist $\lambda_1 = 0$.

Damit ist $\lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_k b_k = 0$. Die Prüfung der j_2 -ten Komponente ergibt $\lambda_2 b_{2j_2} = 0$ und weiters $\lambda_2 = 0$.

Fortführung dieses Verfahrens ergibt $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_k = 0$. \square

Satz. Sei A eine $m \times n$ Matrix. Dann kann A durch endlich viele elementare Zeilenumformungen vom Typ III und Typ IV in eine Matrix B in Zeilenstufenform übergeführt werden.

Gemäß vorher ist dann $ZR(A) = ZR(B)$ und weiters

$\text{Zeilenrang}(A) = \text{Zeilenrang}(B)$.

Beweis bzw. Illustration. (siehe Tafel)

Damit kann nun folgende Problemstellung gelöst werden:

Seien $v_1, v_2, \dots, v_m \in \mathbb{K}^n$. Bestimme eine Basis von $\text{Span}(v_1, \dots, v_m)$.

Lösung. Bilde eine $m \times n$ Matrix A , welche als Zeilenvektoren v_1, v_2, \dots, v_m hat. Führe A in Zeilenstufenform über, die resultierende Matrix sei mit

B bezeichnet. Dann bilden die **Nicht-Nullzeilen** von B die gesuchte Basis.

Beispiel. (siehe Tafel)

Als eine weitere Konsequenz des Vorhergehenden sei folgendes Ergebnis erwähnt (Beweis als Übung). Damit kann dann etwa entschieden werden, ob eine gegebene Familie von Vektoren eine Basis bildet oder nicht.

Korollar. Seien $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{K}^n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) (v_1, v_2, \dots, v_n) ist eine Basis von \mathbb{K}^n
- 2) Die Matrix A mit den Zeilenvektoren v_1, v_2, \dots, v_n kann durch elementare Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix übergeführt werden, wobei alle Diagonalelemente $\neq 0$ sind.

Beispiel. (siehe Tafel)

Bemerkung. In analoger Weise können natürlich auch **elementare Spaltenumformungen** und die Spaltenstufenform definiert werden. Wir werden später zeigen, dass Zeilenrang=Spaltenrang.