

# Lineare Abbildungen - I

Wir kommen nun zur Frage, welche Abbildungen der Struktur von Vektorräumen entsprechen, i.e. welche Abbildungen zwischen Vektorräumen "strukturverträglich" sind. Dies sind die linearen Abbildungen.

**Definition.** Seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume (über demselben  $\mathbb{K}$ ).

Eine Abbildung  $F : V \rightarrow W$  heißt  **$\mathbb{K}$ -linear**, wenn

$$\text{L1) } F(v + w) = F(v) + F(w) \quad \forall v, w \in V$$

$$\text{L2) } F(\lambda v) = \lambda F(v) \quad \forall v \in V, \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

Man sieht leicht, dass die Bedingungen L1) und L2) gleichbedeutend sind mit

$$\text{L) } F(\lambda v + \mu w) = \lambda F(v) + \mu F(w) \quad \forall v, w \in V, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Mittels vollständiger Induktion kann man dann zeigen, dass aus der Linearität von  $F : V \rightarrow W$  folgt, dass

$$F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) + \dots + \lambda_n F(v_n)$$

gilt für  $v_1, \dots, v_n \in V$  und  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ .

**In anderen Worten:** Eine lineare Abbildung führt eine Linearkombination von Vektoren in  $V$  in die entsprechende Linearkombination der Bildvektoren über.

**Grundlegende Eigenschaften.** Sei  $F : V \rightarrow W$  linear.

- $F(0) = 0$  ,  $F(v - w) = F(v) - F(w) \quad \forall v, w \in V$

**Beweis:** Wähle  $v \in V$ . Wegen  $0 = 0 \cdot v$  gilt dann  $F(0) = F(0 \cdot v) = 0 \cdot F(v) = 0$ . Weiters ist  $F(v - w) = F(v + (-1)w) = F(v) + (-1)F(w) = F(v) - F(w)$ .

- $(v_i)$  linear abhängig in  $V \Rightarrow (F(v_i))$  linear abhängig in  $W$

**Beweis:** folgt sofort aus

$$\lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_k v_{i_k} = 0 \Rightarrow \lambda_1 F(v_{i_1}) + \dots + \lambda_k F(v_{i_k}) = F(0) = 0 .$$

- $(F(v_i))$  linear unabhängig in  $W \Rightarrow (v_i)$  linear unabhängig in  $V$

**Beweis:** folgt sofort aus der vorigen Aussage.

- $U \triangleleft V \Rightarrow F(U) \triangleleft W$

**Beweis:** Seien  $w_1, w_2 \in F(U)$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ . Dann existieren  $v_1, v_2 \in U$  mit  $F(v_1) = w_1$  und  $F(v_2) = w_2$ . Nun gilt  $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) = F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \in F(U)$ , weil  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in U$ .

- $Y \triangleleft W \Rightarrow F^{-1}(Y) \triangleleft V$

**Beweis:** Seien  $v_1, v_2 \in F^{-1}(Y)$  und  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ . Dann gilt  $F(v_1), F(v_2) \in Y$  und damit auch  $F(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 F(v_1) + \lambda_2 F(v_2) \in Y$ . Dies bedeutet aber, dass  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in F^{-1}(Y)$ .

- $\dim F(V) \leq \dim V$

**Beweis:** folgt unmittelbar aus der dritten Aussage.

- Man beachte weiters, dass aus der linearen Unabhängigkeit von  $(v_i)$  i.a. **nicht** folgt, dass  $(F(v_i))$  linear unabhängig ist (siehe Nullabbildung).

### Beispiele.

- 1) Die **Nullabbildung**  $F : V \rightarrow W$  mit  $F(v) = 0 \quad \forall v \in V$  ist linear.
- 2) Die **identische Abbildung**  $F : V \rightarrow V$  mit  $F(v) = v \quad \forall v \in V$  ist linear.
- 3) Sei  $\lambda \in \mathbb{K}$  fest. Dann ist die Abbildung  $F : V \rightarrow V$  mit  $F(v) = \lambda \cdot v$  linear.
- 4) Sei  $X$  eine beliebige Menge,  $V = \text{Abb}(X, \mathbb{R})$  und  $\varphi : X \rightarrow X$  eine

beliebige Abbildung.

Dann ist  $F : V \rightarrow V$  mit  $F(f) = f \circ \varphi$  linear.

5) Die Abbildung  $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit  $f \rightarrow f'$  ist linear.

6) Für festes  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist die Abbildung  $\text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f \rightarrow f(x_0)$  linear.

**Eine Schreibweise.** : Für  $v = (v_1, \dots, v_n)$ ,  $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{K}^n$  setzen wir

$$\langle v, w \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n = \sum_{j=1}^n v_j w_j \in \mathbb{K}$$

Dann sind offenbar folgende Eigenschaften erfüllt:

- $\langle v, 0 \rangle = 0$  ,  $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{K}^n$
- $\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle \quad \forall v, v', w \in \mathbb{K}^n$
- $\langle \lambda v, w \rangle = \langle v, \lambda w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K}$

Mit dieser Notation können nun folgende wichtige Beispiele für lineare Abbildungen angegeben werden.

1) Für jedes feste  $w \in \mathbb{K}^n$  ist die Abbildung  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  mit  $F(v) = \langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^n v_j w_j$  linear.

2) Sei  $A \in M(m \times n; \mathbb{K})$ . Wir wollen damit eine Abbildung  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  definieren.

Für  $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  sei

$$F(v) = \left( \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \right) = (\langle a_1, v \rangle, \langle a_2, v \rangle, \dots, \langle a_m, v \rangle)$$

wobei  $a_1, a_2, \dots, a_m$  die Zeilenvektoren von  $A$  bezeichnen.

Dann ist  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  linear und somit kann jeder  $m \times n$  Matrix auf natürliche Weise eine lineare Abbildung  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  zugeordnet werden!

$$\begin{aligned}
F(v + v') &= (\langle a_1, v + v' \rangle, \langle a_2, v + v' \rangle, \dots, \langle a_m, v + v' \rangle) = \\
&(\langle a_1, v \rangle + \langle a_1, v' \rangle, \langle a_2, v \rangle + \langle a_2, v' \rangle, \dots, \langle a_m, v \rangle + \langle a_m, v' \rangle) = \\
&(\langle a_1, v \rangle, \dots, \langle a_m, v \rangle) + (\langle a_1, v' \rangle, \dots, \langle a_m, v' \rangle) = F(v) + F(v')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(\lambda v) &= (\langle a_1, \lambda v \rangle, \langle a_2, \lambda v \rangle, \dots, \langle a_m, \lambda v \rangle) = \\
&(\lambda \langle a_1, v \rangle, \lambda \langle a_2, v \rangle, \dots, \lambda \langle a_m, v \rangle) = \lambda(\langle a_1, v \rangle, \dots, \langle a_m, v \rangle) = \lambda F(v)
\end{aligned}$$

3) Sei nun  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  linear und  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  die kanonische Basis von  $\mathbb{K}^n$ .

Für  $j = 1, \dots, n$  sei  $F(e_j) = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$  und bilde damit eine  $m \times n$ -Matrix  $A$ , wobei offenbar die  $j$ -te Spalte von  $A$  gleich  $F(e_j)$  ist.

Damit kann einer linearen Abbildung  $F : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  auf natürliche Weise eine  $m \times n$  Matrix  $A$  zugeordnet werden.

Für  $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  gilt  $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$  und damit

$$\begin{aligned}
F(v) &= x_1 F(e_1) + \dots + x_n F(e_n) = \\
&x_1(a_{11}, \dots, a_{m1}) + x_2(a_{12}, \dots, a_{m2}) + \dots + x_n(a_{1n}, \dots, a_{mn}) = \\
&\left( \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j} x_j, \dots, \sum_{j=1}^n a_{mj} x_j \right)
\end{aligned}$$

Dies bedeutet aber, dass die dieser Matrix  $A$  nach 2) zugeordnete lineare Abbildung genau jene Abbildung ist, von der wir gestartet sind!

Zur Bestimmung von linearen Abbildungen  $F : V \rightarrow W$  ist folgende Aussage von Bedeutung, welche besagt, dass eine lineare Abbildung bereits dadurch eindeutig bestimmt ist, wenn die Bilder von Basisvektoren bekannt sind.

**Satz.** Seien  $V$  und  $W$   $\mathbb{K}$ -Vektorräume,  $(v_i)_{i \in I}$  eine Basis in  $V$  und  $(w_i)_{i \in I}$  eine beliebige Familie in  $W$ .

Dann gibt es genau eine lineare Abbildung  $F : V \rightarrow W$  mit der Eigenschaft  $F(v_i) = w_i \quad \forall i \in I$ .

**Beweis.** (Verwende die Schreibweise  $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ )

i) **Eindeutigkeit:**

Seien  $F, G : V \rightarrow W$  mit  $F(v_i) = G(v_i) = w_i \quad \forall i \in I$ . Für  $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$  gilt dann  $F(v) = F(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i F(v_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i = \sum_{i \in I} \lambda_i G(v_i) = G(\sum_{i \in I} \lambda_i v_i) = G(v)$ .

Also ist  $F = G$ .

ii) **Existenz:**

Sei  $v \in V$ . Dann ist  $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ . Definiere nun  $F(v) = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i$ .

Für  $v, v' \in V$  seien  $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$  und  $v' = \sum_{i \in I} \mu_i v_i$ .

Dann ist  $v+v' = \sum_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) v_i$  und damit  $F(v+v') = F(\sum_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) v_i) = \sum_{i \in I} (\lambda_i + \mu_i) w_i = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i + \sum_{i \in I} \mu_i w_i = F(v) + F(v')$ .

Analog zeigt man, dass  $F(\lambda v) = \lambda F(v)$ .

$F$  ist somit linear und hat offenbar die Eigenschaft, dass  $F(v_i) = w_i$  für alle  $i \in I$ .  $\square$

**Bemerkung.** Ist  $\dim V = n$  und  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  eine Basis von  $V$ ,  $(w_1, w_2, \dots, w_n)$  eine beliebige Familie aus  $W$ , dann gilt für  $v \in V$  mit  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$  damit  $F(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$ .

**Bemerkung.** Unter den Voraussetzungen des vorigen Satzes gilt weiters

- a)  $F(V) = \text{Span}(w_i)$
- b)  $F$  ist injektiv  $\Leftrightarrow (w_i)$  ist linear unabhängig

**Beweis.**

zu a) : Offenbar ist  $F(V) \subseteq \text{Span}(w_i)$ .

Sei nun  $w \in \text{Span}(w_i)$ , etwa  $w = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i$ . Setze  $v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i \in V$

. Dann ist  $F(v) = w$ , also ist auch  $\text{Span}(w_i) \subseteq F(V)$  und damit  $F(V) = \text{Span}(w_i)$ .

zu b) :

"  $\Rightarrow$  " : Sei  $\lambda_1 w_{i_1} + \dots + \lambda_r w_{i_r} = 0$ . Setze  $v = \lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_r v_{i_r}$ . Dann ist  $F(v) = 0$ . Weil  $F$  injektiv ist und bereits  $F(0) = 0$  ist, muß  $v = 0$  sein. Weil  $(v_{i_1}, \dots, v_{i_r})$  linear unabhängig ist, muß  $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$  sein. Also ist  $(w_i)$  linear unabhängig.

"  $\Leftarrow$  " : Sei  $F(v) = 0$  und  $v = \lambda_1 v_{i_1} + \dots + \lambda_r v_{i_r}$ . Dann ist  $\lambda_1 w_{i_1} + \dots + \lambda_r w_{i_r} = 0$ , und laut Voraussetzung folgt damit  $\lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$ . Somit gilt  $v = 0$ .

Ist nun  $F(v) = F(v')$ , dann  $F(v - v') = 0$  und somit  $v - v' = 0$  bzw.  $v = v'$ . Dies heißt, dass  $F$  injektiv ist.  $\square$

**Beispiel.** Sei  $V = W = \mathbb{R}^2$ .

$v_1 = (1, 1)$ ,  $v_2 = (0, 1)$  bilden eine Basis von  $V$ . Sei  $w_1 = (2, -3)$ ,  $w_2 = (1, 2)$ .

Dann gibt es gemäß vorher genau eine lineare Abbildung  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $F(v_1) = w_1$  und  $F(v_2) = w_2$ .

Frage: Was ist  $F(v)$  für ein beliebiges  $v \in V$ ?

Sei  $v = (x_1, x_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \lambda_1(1, 1) + \lambda_2(0, 1) = (\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2)$ .

Dann gilt  $\lambda_1 = x_1$  und  $\lambda_1 + \lambda_2 = x_2$  bzw.  $\lambda_2 = x_2 - x_1$ .

$F(v) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ , also  $F(x_1, x_2) = x_1(2, -3) + (x_2 - x_1)(1, 2) = (x_1 + x_2, -5x_1 + 2x_2)$ .